Feuille 2 - Matrices : correction [1]

Exercice 1. *1) Soit A une matrice de taille (m,n) à coefficients dans $\mathbb{R}$ et B une matrice de taille (p,q) à coefficients dans $\mathbb{R}$. Quand le produit de A et B est bien défini, écrire le coefficient générique de la matrice AB.*

Le produit est défini lorsque $n = p$ ce qui donne

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \quad 1 \leq i \leq m \; ; \; 1 \leq j \leq q$$

2) Soit A, B, C trois matrices réelles carrés de taille n telles que $B \neq C$. A-t-on $AB = AC \Rightarrow B = C$?

Non, il suffit de prendre :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

alors on a : $AB = AC$ et $B \neq C$.

Exercice 2. *Dans les cas suivants, calculer AB et BA si cela est possible.*
a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons que $A \in \mathcal{M}_{2,3}$ et $A \in \mathcal{M}_{3,4}$ donc $AB \in \mathcal{M}_{2,4}$ et on a

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -9 & -11 \\ 22 & 34 & 42 & 54 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. *Calculer le produit ABC où*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Correction par Anas Bouali et Térence Bayen

On effectue d'abord la multiplication AB :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 & 22 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 13 & 21 & 29 & 12 \\ 12 & 19 & 26 & 8 \end{pmatrix} = D \in \mathcal{M}_{4,4},$$

Maintenant, on effectue la multiplication suivante : $DC = ABC$

$$ABC = DC = \begin{pmatrix} 10 & 16 & 22 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 13 & 21 & 29 & 12 \\ 12 & 19 & 26 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92 & 142 \\ 14 & 21 \\ 122 & 188 \\ 108 & 167 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. *On considère les matrices à coefficients réels*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer (si cela a un sens) les produits AB, BA, AC, CA, BC, CB, B^2. En déduire que A et C sont inversibles et préciser leur inverse.

On a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2\mathrm{Id}$$

et

$$CA = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2\mathrm{Id}$$

il s'ensuit que A et C sont inversibles, et on a

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}C \; ; \; C^{-1} = -\frac{1}{2}A$$

et

$$CB = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -15 & -7 \\ -10 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Noter que les produits BA, BC, B^2 ne sont pas possible ; par contre, on pourrait faire $BB^\top$ de dimension $(2, 2)$ et $B^T B$ de dimension $(3, 3)$.

Exercice 5. *Inverser la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Soient $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3)$ tel que : $Y = MX$ ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 & = y_1 \quad (L_1) \\ -x_2 + x_3 & = y_2 \quad (L_2) \\ x_1 - 2x_2 & = y_3, \quad (L_3) \end{cases}$$

d'abord on réecrit le système sous la forme échelonnée reduite : $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 & = y_1 \\ -x_2 + x_3 & = y_2 \\ -2x_2 - 2x_3 & = y_3 - y_1, \end{cases}$$

pour éliminer x_2 dans L_3 : $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et on obtient

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 & = y_1 \\ -x_2 + x_3 & = y_2 \\ -4x_3 & = (y_3 - y_1) - 2y_2, \end{cases}$$

il s'ensuit que

$$\begin{cases} x_1 & = \frac{1}{2}y_1 - y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 & = \frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{4}y_3 \\ x_3 & = \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{4}y_3, \end{cases}$$

on peut réecrire ce système comme : $X = NY$ avec

$$N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

et on vérifie que : $MN = NM = \mathrm{Id}$. (Cette méthode conduit automatiquement à l'inverse lorsque cela est possible).

Exercice 6. *Calculer ABC lorsque :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

On a

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & -1 \\ 36 & 19 \\ 91 & 7 \end{pmatrix} = D$$

donc

$$ABC = DC = \begin{pmatrix} 32 & -1 \\ 36 & 19 \\ 91 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 59 & 185 \\ 21 & 167 & 349 \\ -70 & 217 & 595 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Trouver $B \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A = 2I + B$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Calculer B^2 et B^3.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a d'après la formule du binome de Newton (où I désigne la matrice identité de $\mathbb{R}^3$) :

$$A^n = (2I + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2I)^{n-k},$$

alors

$$A^n = (2I + B)^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} B^k (2I)^{n-k} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} B^k (2I)^{n-k}.$$

(i) Pour $n = 0$, $A^n = I$.
(ii) Pour $n = A$, $A^1 = A = 2I + B$
(iii) Pour $n \geq 2$, notons que pour tout $n \geq 3$, on a $B^n = 0_{\mathcal{M}_{3,3}}$, alors le second terme est égale à 0. Par conséquent on a pour tout $n \geq 2$:

$$A^n = (2I + B)^n = 2^n Id + n2^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} B^2.$$

Exercice 8. *Calculer le rang de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

On écrit le système $AX = 0$ que l'on met sous forme échelonnée :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x & +2y & +z & +2t & +u & = 0 \\ -x & +y & +2z & +3t & +u & = 0 \\ & 4y & -4z & +4t & & = 0 \\ x & +5y & -2z & +5t & +u & = 0 \end{array} \right.$$

On fait $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x & +2y & +z & +2t & +u & = 0 \\ & 3y & +3z & +5t & +2u & = 0 \\ & 4y & -4z & +4t & & = 0 \\ & 3y & -3z & +3t & & = 0 \end{array} \right.$$

On fait $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$ puis $L_3 \leftarrow 3L_3 - 4L_2$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x & +2y & +z & +2t & +u & = 0 \\ & 3y & +3z & +5t & +2u & = 0 \\ & & -24z & -8t & -8u & = 0 \\ & & -6z & -2z & -2u & = 0 \end{array} \right.$$

La dernière ligne est 4 fois la 3ème. Ainsi, le système a exactement 3 pivots non nuls 1, 3, et -24. Son rang est donc 3 (il y a 2 variables auxiliaires t, u et la dimension de l'espace des solutions est 2).

Exercice 9. *Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et*

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Calculer $A_\theta A_{\theta'}$ puis A_θ^n où $n \in \mathbb{N}^*$.

Il s'agit de matrices de rotations et en utilisant les formules de duplication pour cos et sin, on trouve :

$$A_\theta A_{\theta'} = A_{\theta+\theta'}$$

ce qui implique que $A_\theta^n = A_{n\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2 et en déduire A^{-1}.

On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc il s'ensuit que $AA = \mathrm{Id}$ donc : $A^{-1} = A$.

Exercice 11. *Soit m un réel. Calculer l'inverse des matrices suivantes lorsque c'est possible :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & m & -2 \\ 1 & m+1 & m-2 \\ 2 & 2m+1 & 2m-4 \end{pmatrix}.$$

En résolvant le système linéaire $AX = Y$ on trouve :

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour la seconde matrice, on écrit le système

$$\begin{cases} x + my - 2z = y_1 \\ x + (m+1)y + (m-2)z = y_2 \\ 2x + (2m+1)y + (2m-4)z = y_3 \end{cases}$$

que l'on met sous forme échelonnée par la méthode du pivot. On trouve :

$$\begin{cases} x + my - 2z = y_1 \\ y + mz = -y_1 + y_2 \\ mz = -y_1 - y_2 + y_3 \end{cases}$$

Ainsi la matrice est inversible si et seulement si $m \neq 0$ (elle est inversible si et seulement si elle a 3 pivots non nuls). On trouve en remontant le système

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{m-2}{m} & -\frac{2(m^2+1)}{m} & \frac{m^2+2}{m} \\ 0 & 2 & -1 \\ \frac{-1}{m} & \frac{-1}{m} & \frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

Exercice 12. *On considère les matrices de $M_2(\mathbb{R})$ données par*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer P^{-1}.

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

2) Calculer $B = P^{-1}AP$.
on a

$$P^{-1}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix},$$

donc

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$. En deduire A^n.

Le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons le résultat vrai au rang n. Il vient

$$A^{n+1} = PB^nP^{-1}PBP^{-1} = PB^{n+1}P^{-1}.$$

On conclut par réccurence sur n. D'où

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \; ; \; A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3^n}{2} & \frac{1}{2} - \frac{3^n}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{3^n}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3^n}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 13. *Soit $a, b, \in \mathbb{R}$. Déterminer les matrices $(2,2)$ qui commutent avec*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On suppose $(a,b) \neq (0,0)$ sinon toute matrice conviendrait. Puis, on écrit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} bz = 0 \\ az = 0 \\ ay + bt = bx \\ bz = 0 \end{cases}$$

Donc $z = 0$. Supposons $a \neq 0$. Alors, $y = \frac{b(x-t)}{a}$. D'où les matrices recherchées sont paramétrées par x et t :

$$\begin{pmatrix} x & \frac{b(x-t)}{a} \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

Si $a = 0$ alors $b \neq 0$ (car la matrice de départ est non nulle). Ainsi, $t = x$. D'où les matrices recherchées sont paramétrées par x et y :

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. *Inverser les matrices suivantes (ci-dessous $x \in \mathbb{R}$) :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \ ; \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Pour la première matrice, il s'agit d'une matrice de rotation dans $\mathbb{R}^3$ (autour de l'axe (Ox)) et rappelez vous le résultat de l'exercice 9. On écrit le système linéaire $AX = Y$:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 \cos x + x_3 \sin x = y_2 \\ -x_2 \sin x + x_3 \cos x = y_3 \end{cases}$$

ce qui donne comme inverse

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-x) & \sin(-x) \\ 0 & -\sin(-x) & \cos(-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \\ 0 & \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}.$$

Pour la seconde matrice, on résout $BX = Y$ et en mettant sous forme échelonnée réduite (calcul non détaillé, la méthode étant la même que dans l'exercice 11 par exemple), on en déduit

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 17 & -5 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15. *Soit A, B deux matrices carrés t.q. $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent i.e. $AB = BA$ (Indication : introduire $(I_n - A)(I_n - B)$).*

On a $(I_n - A)(I_n - B) = I_n$. Ainsi, $(I_n - B)$ est inversible d'inverse $I_n - A$. D'où par définition de l'inverse $(I_n - B)(I_n - A) = I_n$ ce qui entraine que $BA = B + A = A + B = AB$.

Exercice 16. *Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque A est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Notons Id matrice identité de $\mathbb{R}^3$. On a $A = 3\mathrm{Id} + B$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et on obtient que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et pour tout $n \geq 3$ on a : $B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient d'après le binôme de Newton : pour tout $n \geq 0$,

$$A^n = (3I + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (3I)^{n-k}.$$

D'où

$$A^n = (3I+B)^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} B^k (2I)^{n-k} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} B^k (2I)^{n-k}$$

notons que $\forall n \geq 3$ on a $B^n = 0_{\mathcal{M}_{3,3}}$, alors le second terme est égale à 0. Pour $n=0$, $A^n = Id$. Pour $n=1$, $A^1 = A$. Pour tout $n \geq 2$:

$$A^n = (3I+B)^n = 3^n \mathrm{Id} + n3^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2.$$

Exercice 17. *On prend comme corps de base $K = \mathbb{R}$ (c.a.d. on considère des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$). Soit x et y deux vecteurs colonne de taille $(n,1)$. Soit A une matrice de taille (n,n) Calculer les produits suivants :*
- produit scalaire de x par y : $x^T y$. A quelle condition $x^T x$ est-il nul ?
- produit extérieur de x par y : xy^T. Calculer le produit $(xy^T)(xy^T)$ en fonction de la matrice xy^T
- forme bilinéaire : $x^T Ay$.

- produit scalaire = produit d'une ligne par une colonne :

$$x^\top y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

produit extérieur de x par y : xy^T d'une colonne par une ligne donne une matrice (n,n) de coefficient (i,j), $x_i y_j$

$$xy^T = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n y_1 & \cdots & x_n y_n \end{pmatrix}$$

On verra plus tard que cette matrice est de rang 1 car chaque colonne vaut exactement $y_j(x_1, \ldots,_n)^\top$. Ainsi, comme le rang de la matrice est égale au rang du sous-espace vectoriel engendré par les n colonnes (voir chapitre matrice et chapitre espaces vectoriels), nous en déduisons bien que son rang vaut 1.

On constate que

$$xy^T xy^T = x \underbrace{(y^T x)}_{\in \mathbb{R}} y^T = (y^T x) xy^T$$

- forme bilinéaire :

$$x^T Ay = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i y_j$$

Exercice 18. *Déterminer l'inverse M^{-1} de la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

En utilisant la meme méthode utilisé dans l'exercice 5 on trouve que

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Trouver ensuite une matrice X de taille $(3,3)$ telle que

$$2XM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,3}$ tel que

$$2XM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = Id + B,$$

or, d'après la première question on a : $M^{-1}M = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *donc*

$$M^{-1}M + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

on factorise par M à droite et on obtient

$$(M^{-1} + BM^{-1})M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

donc par identification on a

$$(M^{-1} + BM^{-1})M = 2XM$$

ce qui implique que

$$X = \frac{1}{2}(M^{-1} + BM^{-1}),$$

donc

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & \frac{-5}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 19. *Calculer les produits de matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut effectuer le produit car $A \in \mathcal{M}_{5,6}$ et $B \in \mathcal{M}_{6,4}$ et on a

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20. *1) Montrer que $Tr(AB) = Tr(BA)$ pour toutes matrices carrées A, B, de taille (n, n).*
2) Que dire d'une matrice A à coefficients réels qui vérifie $Tr(AA^T) = 0$?

1) On a

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

$$Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ik}$$

et donc ces deux quantités sont bien égales (indices muets).
2) L'équation $Tr(AA^T) = 0$ équivaut à

$$Tr(A^T A) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} (A^T)_{j,i} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = 0,$$

et la somme des n^2 carrés est nulle si et seulement si $a_{i,j} = 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Ainsi, $A = 0$.