1

Algèbre 2 (2023) - TD 1 continuation

Exo. 4 On aplique ln à toutes les équations (notez que $x>0$, $y>0$, $z>0$), et on pose $X=\ln x$, $Y=\ln y$ et $Z=\ln z$. On résout

$$\begin{cases} 3X+2Y+6Z=0 \\ 4X+5Y+12Z=\ln 2 \\ 2X+2Y+5Z=\ln 3 \end{cases} \overset{\text{devoir}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{\text{devoir}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2X+2Y+5Z=\ln 3 \\ Y+2Z=\ln 2-2\ln 3 \\ Z=-7\ln 3+2\ln 2 \end{cases}$$

On cherche l'écriro comme ~~un~~ système de Cramer. On fait $L_2 \leftarrow L_2-2L_3$ pour obtenir

$$\begin{cases} 2X+2Y+5Z=\ln 3 \\ Y=-3\ln 2+12\ln 3 \\ Z=-7\ln 3+2\ln 2. \end{cases}$$

Maintenant, on fait $L_1 \leftarrow L_1-2L_2-5L_3$ et on obtient

$$\begin{cases} 2X=12\ln 3-4\ln 2 \\ Y=12\ln 3-3\ln 2 \\ Z=2\ln 2-7\ln 3 \end{cases} \overset{L_1\leftarrow \frac{L_1}{2}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} X=6\ln 3-2\ln 2, \\ Y=12\ln 3-3\ln 2, \\ Z=2\ln 2-7\ln 3. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} X=\ln\left(\frac{3^6}{2^2}\right) \\ Y=\ln\left(\frac{3^{12}}{2^3}\right) \\ Z=\ln\left(\frac{2^2}{3^7}\right) \end{cases}$$

Ainsi,

$$\ln x = X \Rightarrow x = e^X = e^{\ln\left(\frac{3^6}{2^2}\right)} = \boxed{\frac{3^6}{2^2}},$$

$$\ln y = Y \Rightarrow y = e^Y = e^{\ln\left(\frac{3^{12}}{2^3}\right)} = \boxed{\frac{3^{12}}{2^3}},$$

$$\ln z = Z \Rightarrow z = e^Z = e^{\ln\left(\frac{2^2}{3^7}\right)} = \boxed{\frac{2^2}{3^7}}.$$

La solution de

$$\begin{cases} x^3y^2z^6 = 1 \\ x^4y^5z^{12} = 2 \\ x^2y^2z^5 = 3 \end{cases},$$

est $S = \left\{\left(\frac{3^6}{2^2}, \frac{3^{12}}{2^3}, \frac{2^2}{3^7}\right)\right\}$.

<u>Exo. 5</u> On échellonne le système:

$$\begin{cases} 3x - 7y + \lambda z = 0 \\ x - 4y - 2z = 0 \\ 2x - (\lambda+3)y - 2z = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}}{\overset{L_1 \leftarrow L_2}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x - 4y - 2z = 0 \\ [-(\lambda+3)+8]y + 2z = 0 \\ 5y + (6+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - 4y - 2z = 0 \\ 5y + (6+\lambda)z = 0 \\ (5-\lambda)y + 2z = 0 \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow 5L_3 - (5-\lambda)L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - 4y + (-2z) = 0 \\ 5y + (6+\lambda)z = 0 \\ [10 - (6+\lambda)(5-\lambda)]z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - 4y - 2z = 0 & (L_1) \\ 5y + (6+\lambda)z = 0 & (L_2) \\ (\lambda^2 + \lambda - 20)z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

On distingue deux cas principaux:

▶ $\lambda^2 + \lambda - 20 \neq 0$. Alors, d'après L_3, on trouve $z = 0$.
En substituant dans L_2 on trouve $y = 0$, donc $x = 0$ d'après L_1.

3 / Puisqu'on cherche des solutions différentes de $(0,0,0)$, on doit trouver les lambdas qui satisfont le deuxième cas :

▶ $\lambda^2+\lambda-20=0$.

On calcule $\Delta = 1^2-4\cdot1\cdot(-20) = 1+80 = 81 > 0$.

Les racines de $\lambda^2+\lambda-20=0$ sont $\lambda=4$ et $\lambda=-5$.

Pour ces valeurs de λ, le système admet des solutions différentes de $(0,0,0)$.

On veut résoudre pour $\lambda=4$ puis pour $\lambda=-5$.

$\lambda = 4$ | On a

$$\begin{cases} x-4y-2z=0 \\ 5y+(6+\lambda)z=0 \\ (\underbrace{\lambda^2+\lambda-20}_{=0 \text{ car } \lambda=4 \text{ est racine}})z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-4y-2z=0 \\ 5y+10z=0 \end{cases}$$

$$\overset{\text{devoir}}{\iff} S=\{(-6z,-2z,z) : z\in\mathbb{R}\}.$$

$\lambda = -5$ | On a

$$\begin{cases} x-4y-2z=0 \\ 5y+z=0 \end{cases}$$, donc (devoir) $S=\{(-6y, y, -5y) : y\in\mathbb{R}\}$.