Algèbre 2 (2023) – TD 2

Exo. 1

1) $A \cdot B$ est bien défini lorsque $n = p$.

On considère

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,j} & \cdots & a_{k,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,l} & \cdots & b_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_{i,1} & \cdots & b_{i,l} & \cdots & b_{i,q} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,l} & \cdots & b_{n,q} \end{pmatrix}$$

Donc

$$AB = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,l} & \cdots & c_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_{k,1} & \cdots & \boxed{c_{k,l}} & \cdots & c_{k,q} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,1} & \cdots & c_{m,l} & \cdots & c_{m,q} \end{pmatrix},$$

où

$$c_{k,l} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} \cdot b_{j,l} .$$

2) NON. Contrexemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $AB = 0 = AC$ mais $B \neq C$.

Exo. 2

a) $AB = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -9 & -11 \\ 22 & 34 & 42 & 54 \end{pmatrix}$, b) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exo. 3

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & 16 & 22 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 13 & 21 & 29 & 12 \\ 12 & 19 & 26 & 8 \end{pmatrix}, \quad ABC = (AB)C = \begin{pmatrix} 92 & 142 \\ 14 & 21 \\ 122 & 188 \\ 108 & 167 \end{pmatrix}$$

<u>Exo. 4</u> ① Soient $A, B \in G$, disons

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$AB = \begin{pmatrix} ab & ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G \Rightarrow G \text{ stable pour le produit.}$$

② Soit $a > 0$ et

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Étant donnés $A, B \in G$, disons

$$A = \begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} a^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{R},$$

on a

$$AB = \begin{pmatrix} a^x a^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G \text{ stable pour le produit.}$$

Afin de déterminer si G est stable pour le passage à l'inverse, on fixe $A \in G$ et on calcule A^{-1}. Si $A^{-1} \in G$, alors G est stable pour passage à l'inverse. Sinon, non. On écrit

$$A = \begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}$$

et on pose

3 /

$$\begin{cases} a^x x_1 = y_1 \\ x_2 + x x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - x L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 = \frac{1}{a^x} y_1 \\ x_2 = y_2 + (-x) y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

Par conséquent, G est stable pour passage à l'inverse.

Exo. 5 On suppose $AB = A + B$ et on calcule

$$\begin{aligned} (I_n - A)(I_n - B) &= I_n \cdot I_n - I_n B - A I_n + AB \\ &= I_n - \cancel{B} - \cancel{A} + (\cancel{A} + \cancel{B}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (I_n - A)(I_n - B) = I_n$$

$$\Rightarrow (I_n - A)^{-1} = I_n - B$$

$$\Rightarrow (I_n - B)(I_n - A) = I_n$$

$$\Rightarrow \cancel{I_n} - A - B + BA = \cancel{I_n}$$

$$\Rightarrow BA = A + B = AB$$

$$\Rightarrow BA = AB.$$

Exo. 6 1) NON. En effet, $tr(AB) = tr(BA)$, donc

$$tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA) = 0,$$

tandis que $tr(x I_n) = nx \neq 0$ puisque $x \neq 0$.

2) NON. Contrexemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exo. 7

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad BA \text{ pas possible}$$

$$AC = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 I_2, \qquad (\star)$$

$$CA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2 I_2,$$

$$BC \text{ pas possible}, \quad CB = \begin{pmatrix} 22 & -15 & -7 \\ -10 & 7 & 3 \end{pmatrix},$$

B^2 pas possible.

D'après $(\star)$, on a

$$A\left(\frac{-1}{2}C\right) = I_2 \Rightarrow A \text{ inversible avec } A^{-1} = \frac{-1}{2}C,$$

$$\left(\frac{-1}{2}A\right)C = I_2 \Rightarrow C \text{ inversible avec } C^{-1} = \frac{-1}{2}A.$$

Exo. 8

1) On écrit, pour $A = (a_{i,j})_{n \times n}$,

$$\sigma(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.$$

2) On a

$$JAJ = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,l} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,l} & \cdots & a_{k,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,l} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{i,l} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{i,l} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(A) & \cdots & \sigma(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(A) & \cdots & \sigma(A) \end{pmatrix}.$$

Exo. 9

On pose

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = y_1 \\ -x_2 + x_3 = y_2 \\ x_1 - 2x_2 = y_3 \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 + 2x_3 = y_1 \\ -x_2 + x_3 = y_2 \\ -2x_2 - 2x_3 = y_3 - y_1 \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_2 - 2L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 + 2x_3 = y_1 \\ -x_2 + x_3 = y_2 \\ -4x_3 = y_3 - y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

Ainsi,

$$x_3 = \frac{-y_1 - 2y_2 + y_3}{-4} = \frac{-y_1}{-4} + \frac{-2}{-4} y_2 + \frac{y_3}{-4} = \frac{1}{4} y_1 + \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{4} y_3,$$

$$x_2 = x_3 - y_2 = \frac{1}{4} y_1 + \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{4} y_3 - y_2 = \frac{1}{4} y_1 - \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{4} y_3,$$

$$x_1 = y_1 - 2x_3 = y_1 - 2\left(\frac{1}{4} y_1 + \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{4} y_3\right) = y_1 - \frac{1}{2} y_1 - y_2 + \frac{1}{2} y_3$$

$$= \frac{1}{2} y_1 - y_2 + \frac{1}{2} y_3.$$

On écrit

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} y_1 - y_2 + \frac{1}{2} y_3 \\ x_2 = \frac{1}{4} y_1 - \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{4} y_3 \\ x_3 = \frac{1}{4} y_1 + \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{4} y_3 \end{cases} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}.$$

Exo. 10

Devoir

Exo. 11

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) On prend

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $A = 2I + B$.

2) On a

$$B^2 = B \times B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3\times 3}.$$

3) On sait que les matrices $2I$ et B commutent. On peut appliquer la formule du binôme de Newton et obtenir

$$A^n = (2I + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I)^{n-k} B^k.$$

Puisque $B^k = 0$ pour $k \geqslant 3$, on trouve

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I)^{n-k} B^k = \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} (2I)^{n-0} \underbrace{B^0}_{=I} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{=n} (2I)^{n-1} \underbrace{B^1}_{=B} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} (2I)^{n-2} B^2$$

$$= 1 \cdot (2I)^n \cdot I + n(2I)^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} (2I)^{n-2} B^2$$

$$= (2I)^n + n(2I)^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} (2I)^{n-2} B^2$$

$$= 2^n I^n + n 2^{n-1} I^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} I^{n-2} B^2$$

$$= 2^n I + n 2^{n-1} I B + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} I B^2$$

$$= 2^n I + n 2^{n-1} B + n(n-1) 2^{n-3} B^2$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n2^n & -n2^{n-1} \\ 0 & 0 & n2^n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & n(n-1)2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & n2^n & n(n-1)2^{n-1} - n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & n2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

#

7

Exo. 12 Devoir

Exo. 13 On calcule

$$A_\theta A_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & -\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta) \\ \sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta & \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} = A_{\theta+\theta'}$$

$$\Rightarrow A_\theta A_{\theta'} = A_{\theta+\theta'}.$$

Ainsi,

$$A_\theta^2 = A_\theta A_\theta = A_{\theta+\theta} = A_{2\theta}$$

$$A_\theta^3 = A_\theta^2 A_\theta = A_{2\theta} A_\theta = A_{2\theta+\theta} = A_{3\theta}$$

$$\vdots$$

$$A_\theta^n = A_\theta \overset{n}{\cdots} A_\theta = A_{\theta+\overset{n}{\cdots}+\theta} = A_{n\theta}.$$

Exo. 14 On a $A^2 = A \times A = I_3$. Devoir

Par conséquent, $A^{-1} = A$.

Exo. 15

$A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on suppose

$$A^k = \lambda^k (B + kC), \text{ pour } k = 1, 2, 3.$$

1) On calcule

$$A^3 = A^2 A = \lambda^2 (B + 2C) \cdot \lambda (B + C) = \lambda^3 (B^2 + BC + 2CB + 2C^2) \quad (1)$$

et

$$A^3 = A A^2 = \lambda (B + C) \cdot \lambda^2 (B + 2C) = \lambda^3 (B^2 + 2BC + CB + 2C^2) \quad (2)$$

D'après (1) et (2), on a

$$\lambda^3 (B^2 + BC + 2CB + 2C^2) = \lambda^3 (B^2 + 2BC + CB + 2C^2)$$

$$\overset{\lambda \neq 0}{\Longrightarrow} \cancel{B^2} + BC + 2CB + \cancel{2C^2} = \cancel{B^2} + 2BC + CB + \cancel{2C^2}$$

$$\Longrightarrow \cancel{B}C + \cancel{2}CB = \cancel{2}BC + \cancel{C}B$$

$$\Longrightarrow CB = BC. \quad \#$$

2) On a, vu que $BC = CB$,

$$A^4 = A^2 A^2 = \lambda^2 (B + 2C) \cdot \lambda^2 (B + 2C) = \lambda^4 (B^2 + 4BC + 4C^2) \quad (3)$$

et

$$A^4 = A^3 A = \lambda^3 (B + 3C) \cdot \lambda (B + C) = \lambda^4 (B^2 + 4BC + 3C^2) \quad (4)$$

D'après (3) et (4), on trouve $4C^2 = 3C^2 \Rightarrow C^2 = 0$.

Maintenant, on calcule

$$A^3 = A^2 A \Longrightarrow \cancel{\lambda^3} (B + 3C) = \cancel{\lambda^2} (B + 2C) \cancel{\lambda} (B + C)$$

$$\underset{BC = CB}{\overset{C^2 = 0}{\Longrightarrow}} B + 3C = B^2 + 3BC \quad (5)$$

et

9

$$A^2 = AA \Longrightarrow \cancel{\lambda}^2(B+2C) = \cancel{\lambda}(B+C)\cancel{\lambda}(B+C)$$

$$\Longrightarrow B+2C = B^2 + 2BC \qquad (6)$$

D'après (5) et (6) on trouve

$$\cancel{B} + \cancel{3}C \overset{(5)}{=} B^2 + 3BC = B^2 + 2BC + BC \overset{(6)}{=} \cancel{B} + \cancel{2}C + BC$$

$$\Longrightarrow BC = C. \qquad (7)$$

$$\overset{(6)}{\Longrightarrow} B + 2\cancel{C} = B^2 + 2BC \overset{(7)}{=} B^2 + \cancel{2C}$$

$$\Longrightarrow B^2 = B \qquad (8)$$

3) On définit $P(k) : A^k = \lambda^k(B + kC)$.

Les propriétés $P(1), P(2), P(3)$ sont vraies par hypothèse. Supposons que $P(k)$ est vraie et montrons $P(k+1)$.

Puisque $P(1), P(2), P(3)$ sont vraies, d'après 2) on a $BC = CB$, $C^2 = 0$, $BC = C$ et $B^2 = B$. On a

$$P(k+1) : A^{k+1} = A^k A = \lambda^k(B+kC)\lambda(B+C)$$

$$= \lambda^{k+1}(B^2 + BC + kCB + kC^2)$$

$$= \lambda^{k+1}(B + BC + kBC + 0)$$

$$= \lambda^{k+1}(B + (k+1)BC)$$

$$= \lambda^{k+1}(B + (k+1)C).$$

$\longrightarrow P(k+1)$ vrai.

D'après le principe de récurrence,

$$A^k = \lambda^k(B+kC), \ \forall k \geq 1.$$

10

<u>Exo. 16</u> On pose

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x + 2y = y_1 \\ 4x - y = y_2 \end{cases}$

$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + 2y = y_1 \\ -9y = y_2 - 4y_1 \end{cases}$

$\longrightarrow y = \frac{-y_2}{9} + \frac{4y_1}{9}$

et $x = y_1 - 2y = y_1 + \frac{2y_2}{9} - \frac{8y_1}{9} = \frac{y_1}{9} + \frac{2y_2}{9}$.

On écrit

$$x = \frac{1}{9}y_1 + \frac{2}{9}y_2$$

$$y = \frac{4}{9}y_1 - \frac{1}{9}y_2$$

Donc A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} \end{pmatrix}. \quad \#$$

Pour $B = \begin{pmatrix} 1 & m & -2 \\ 1 & m+1 & m-2 \\ 2 & 2m+1 & 2m-4 \end{pmatrix}$ on pose

$$\begin{cases} x + my - 2z = y_1 \\ x + (m+1)y + (m-2)z = y_2 \\ 2x + (2m+1)y + (2m-4)z = y_3 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x + my - 2z = y_1 \\ y + mz = y_2 - y_1 \\ y + 2mz = y_3 - 2y_1 \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + my - 2z = y_1 \\ y + mz = y_2 - y_1 \\ mz = y_3 - y_1 - y_2 \end{cases}$$

Si $m = 0$, le système n'est pas Cramer, donc B n'est pas inversible dans ce cas.

Si $m \neq 0$, alors

$$z = \frac{y_3 - y_1 - y_2}{m} = -\frac{1}{m} y_1 - \frac{1}{m} y_2 + \frac{1}{m} y_3$$

$$y = y_2 - y_1 - mz = y_2 - y_1 - (y_3 - y_1 - y_2) = 2y_2 - y_3$$

$$x = y_1 - my + 2z = y_1 - 2my_2 + my_3 + 2\,\frac{y_3 - y_1 - y_2}{m}$$

$$\Rightarrow x = y_1 - \frac{2y_1}{m} - 2my_2 - \frac{2y_2}{m} + my_3 + \frac{2y_3}{m}$$

$$\Rightarrow x = \frac{m-2}{m} y_1 - \frac{2m^2+2}{m} y_2 + \frac{m^2+2}{m} y_3$$

On écrit

$$\begin{aligned} x &= \frac{m-2}{m} y_1 - \frac{2m^2+2}{m} y_2 + \frac{m^2+2}{m} y_3 \\ y &= \qquad\qquad\quad 2y_2 \qquad\quad - y_3 \\ z &= -\frac{1}{m} y_1 - \frac{1}{m} y_2 \qquad + \frac{1}{m} y_3 \end{aligned}$$

Ainsi, B est inversible est

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{m-2}{m} & -\frac{2m^2+2}{m} & \frac{m^2+2}{m} \\ 0 & 2 & -1 \\ \frac{-1}{m} & -\frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{pmatrix}.$$

Exo. 17 1) Soient $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$.

On sait que $AB = (C_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ où

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Ainsi, les termes de la diagonale de AB sont

$$C_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i},$$

d'où

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} C_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}.$$

Similairement,

$$\mathrm{tr}(BA) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} b_{j,l} a_{l,j}.$$

On note que

commutativité dans $\mathbb{R}$

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \underset{k \to j}{\overset{i \to l}{=}} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{l,j} b_{j,l} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{j,l} a_{l,j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} b_{j,l} a_{l,j} = \mathrm{tr}(BA).$$

permutation d'une somme finie

13

Exo. 17 ② Lorsque $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$, on a $A^T = (b_{i,j})$ où

$$b_{i,j} = a_{j,i}.$$

On a donc $AA^T = (c_{i,j})$, où

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{j,k}.$$

Ainsi,

$$tr(AA^T) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{i,k} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2.$$

Si $tr(AA^T) = 0$, alors $a_{i,k}^2 = 0 \Rightarrow a_{i,k} = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et $k = 1, \dots, n$. Autrement dit, $A = 0$ est la matrice nulle.

③ Nous avons montré que, lorsque $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$, alors

$$tr(XY) = tr(YX).$$

Ainsi,

$$tr(ABCD) = tr(BCDA) = tr(CDAB) = tr(DABC)$$

mais n'est pas forcément égale à $tr(DCBA)$, $tr(BADC)$ ou $tr(ACBD)$.

14

Exo. 18 1) On a $\det P = -2$, donc

$$P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

2) On a

$$B = P^{-1}AP = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) On a

$$A^n = (A)^n = (PBP^{-1})^n = \underbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})}_{n \text{ facteurs}}$$

$$\overset{\text{Associativité}}{=} PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)BP^{-1}$$

$$\overset{P^{-1}P=I}{=} PBIBI\cdots IBP^{-1}$$

$$= P\underbrace{BBB\cdots B}_{n \text{ facteurs}}P^{-1} = PB^nP^{-1}.$$

Ainsi,

$$A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3^n \\ 1 & -3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} \frac{1+3^n}{2} & \frac{1-3^n}{2} \\ \frac{1-3^n}{2} & \frac{1+3^n}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n \\ 1-3^n & 1+3^n \end{pmatrix}.$$

15

Exo. 19 On cherche les matrices $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ telles que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} ax & bx \\ az & bz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} ax = ax+bz \\ bx = ay+bw \\ az = 0 \\ bz = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} bz = 0 \\ bx = ay+bw \\ az = 0 \end{cases}$$

▸ Si $a=0$ et $b=0$, toute matrice commute avec $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore S = M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

▸ Si $a \neq 0$, on a

$az = 0 \Rightarrow z = 0$

$bz = 0 \iff 0 = 0$

$bx = ay + bw \Rightarrow y = \dfrac{b(x-w)}{a}$

$$\therefore S = \left\{ \begin{pmatrix} x & \frac{b(x-w)}{a} \\ 0 & w \end{pmatrix} : x, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

▸ Si $a=0$ et $b \neq 0$, on a

$az = 0 \iff 0 = 0$

$bz = 0 \Rightarrow z = 0$

$bx = ay + bw \iff bx = bw \Rightarrow x = w$

$$\therefore S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exo. 20

On pose

$$(S)\begin{cases} x_1 & = y_1 \\ \cos x \cdot x_2 + \sin x \cdot x_3 & = y_2 \\ -\sin x \cdot x_2 + \cos x \cdot x_3 & = y_3 \end{cases}$$

Disjonction de cas sur le pivot de la ligne 2:

▶ Si $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$. Alors $\cos x = 0$. On fait $L_2 \leftrightarrow L_3$ et on trouve

$$(S)\begin{cases} x_1 & = y_1 \\ -\sin x \cdot x_2 & = y_3 \\ \sin x \cdot x_3 & = y_2 \end{cases}$$

On écrit

$$x_1 = y_1$$
$$x_2 = \frac{-1}{\sin x} y_3$$
$$x_3 = \frac{1}{\sin x} y_2$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sin x} \\ 0 & \frac{1}{\sin x} & 0 \end{pmatrix}$$, lorsque $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

▶ Si $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Alors $\cos x \neq 0$. On fait $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{\sin x}{\cos x} L_2$ et on trouve

17

$$(S)\begin{cases} x_1 = y_1 \\ \cos x \cdot x_2 + \sin x \cdot x_3 = y_2 \\ \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} x_3 = y_3 + \dfrac{\sin x}{\cos x} y_2 \end{cases}$$

- Si $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, alors $\sin x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 0$ donc le système n'est pas de Cramer donc A n'est pas inversible dans ce cas.

- Si $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, alors

$$x_3 = \frac{\cos x}{\sin^2 x} y_3 + \frac{1}{\sin x} y_2,$$

et

$$x_2 = \left(y_2 - \sin x \cdot x_3\right) \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{\cos x} y_2 - \frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} y_3 + \frac{1}{\sin x} y_2\right)$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{\cos x} y_2 - \frac{1}{\sin x} y_3 - \frac{1}{\cos x} y_2$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-1}{\sin x} y_3.$$

On écrit

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \dfrac{1}{\sin x} y_2 + \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} y_3 \\ x_3 = \dfrac{-1}{\cos x} y_3 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin x} & \frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\cos x} \end{pmatrix}$$

lorsque $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

#

18 / Devoir : calculer B^{-1}.

Exo. 21 Devoir (voir Exo. 11)

Exo. 22 On écrit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{n\times 1}.$$

- Alors $x^T = (x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n)_{1\times n}$. Ainsi,

$$x^T y = (x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n)_{1\times n} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)_{1\times 1}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} x^T x = 0 &\iff (x_1^2 + \cdots + x_n^2)_{1\times 1} = (0)_{1\times 1} \\ &\iff x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \\ &\iff x_i = 0, \; i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

$$\boxed{x^T x = 0 \iff x = 0}.$$

- $y^T = (y_1 \; y_2 \; \cdots \; y_n)_{1\times n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x y^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} (y_1 \; y_2 \; \cdots \; y_n)_{1\times n} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Ainsi,

$$xy^Txy^T = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_1x_iy_iy_1 & \cdots & \sum_{i=1}^n x_1x_iy_iy_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_nx_iy_iy_1 & \cdots & \sum_{i=1}^n x_nx_iy_iy_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1\sum_{i=1}^n x_iy_i & \cdots & x_1y_n\sum_{i=1}^n x_iy_i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1\sum_{i=1}^n x_iy_i & \cdots & x_ny_n\sum_{i=1}^n x_iy_i \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & \cdots & x_n y_n \end{pmatrix} = (x^T y)\, x\, y^T.$$

$$- \; x^T A y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j .$$ Devoir

Exo. 23 On pose et on résout

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = y_1 \\ \quad\; y + 2z = y_2 \\ \quad 4y + 6z = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y_1 \qquad\qquad - \frac{1}{2} y_3 \\ y = \quad -3y_2 + y_3 \\ z = \quad 2y_2 - \frac{1}{2} y_3 \end{cases}.$$

Ainsi,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si X satisfait $2XM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, on a

$$2XM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \iff 2XMM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}$$

$$\iff 2X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\iff 2X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & \frac{-5}{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & \frac{-5}{2} \end{pmatrix}.$$

20

Exo. 24

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -9 & -6 \end{pmatrix}$$

Devoir