Chapitre 2 : matrices

Dans tout le chapitre le symbole $\mathbb{K}$ désigne indifféremment l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1. *Une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ de type (m, n) est un tableau à m lignes et n colonnes représenté sous la forme*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Les $a_{ij} \in \mathbb{K}$ sont les coefficients de la matrice. On note parfois $A = (a_{ij})_{1,\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$.

Définition 2. *On note $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de type (m, n).*

Définition 3. *Deux matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ sont égales si elles ont les mêmes coefficients, c'est à dire $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall (i, j) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}$.*

Définition 4. *Une matrice est dite nulle si tous ses coefficients sont nuls. Une telle matrice est notée* 0. *Ainsi, si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$,*

$$A = 0 \iff a_{ij} = 0 \ \forall (i, j) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}.$$

1.2 Matrices particulières

a) Matrice ligne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{K})$$

b) Matrice colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m1}(\mathbb{K})$$

c) Matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}) =: \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Certaines matrices carrées sont elles-mêmes particulières.
i) Matrice triangulaire inférieure

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ii) Matrice triangulaire supérieure

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

iii) Matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_{11}, ..., a_{nn})$$

iv) Matrice identité

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, ..., 1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Autres exemples :
- Matrices symétriques : soit $A \in M_n(K)$ une matrice carré. On dit que A est symétrique si et seulement si pour tout $1 \leq i, j \leq n$ on a $a_{i,j} = a_{j,i}$. On peut aussi définir les matrices antisymétriques. On dit que A est anti-symétrique si et seulement si pour tout $1 \leq i, j \leq n$ on a $a_{i,j} = -a_{j,i}$.
- Matrices (base canonique pour les matrices) : $E_{i,j}$ où $1 \leq i, j \leq n$ telle que $(E_{i,j})_{k,l} = 0$ si $(k, l) \neq (i, j)$ et $(E_{i,j})_{i,j} = 1$. Par exemple pour les matrices de taille $(2, 2)$:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Homothéties : $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in K$.
- Matrices de rotation dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Exercice 1. *Ecrire toute matrice carré A comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique (indication : astuce similaire que pour écrire toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme la somme d'une fonction faire et impaire).*

1.3 Sous-matrice

Définition 5. *On appelle sous-matrice d'une matrice A une matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes de A.*

2 Opérations

2.1 Addition, multiplication par une constante

Définition 6. *Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $A + B$ par*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}).$$

Définition 7. *Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On définit la matrice αA par*

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}).$$

On vérifie facilement les propriétés suivantes.

Proposition 1. *Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a*

$$\begin{aligned} &A + B = B + A \\ &(A + B) + C = A + (B + C) \\ &\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B. \end{aligned}$$

2.2 Multiplication entre deux matrices

Définition 8. *Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $C = AB \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K})$ (le produit de A et B) par $C = (c_{ij})$ et*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

• Noter que pour que le produit AB soit possible il suffit que le nombre de lignes de B soit égal au nombre de colonnes de A.
• Noter également que le produit de $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ donne une matrice $C = AB$ dans $\mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K})$.

Pour procéder au produit entre deux matrices, on peut placer les matrices comme ci-dessous : ceci permet de savoir directement où placer le coefficient $c_{i,j}$ de la nouvelle matrice ainsi obtenue.

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\text{Taille (3,2)}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{Taille (4,3)}} & \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 8 & 2 \\ 9 & 13 \\ 33 & 27 \end{pmatrix}}_{\text{Taille (4,2)}} \end{array}$$

Le coefficient (i, j) de la nouvelle matrice est à l'intersection de la ligne i et de la colonne j (produit ligne - colonne).

Remarque 1. *1. Attention à la compatibilité des dimensions.*

2. *Le produit AB peut être défini sans que BA ne le soit. Et même si AB et BA sont tous deux définis (matrices carrées), en général $AB \neq BA$. Si $AB = BA$, on dit que A et B commutent.*
3. *Il se peut que $AB = 0$ alors que $A \neq 0$ et $B \neq 0$. A titre d'exemple, voici l'exemple d'une matrice A nilpotente (c.a.d. telle qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que $A^n = 0$) :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; A^3 = 0 \Rightarrow AB = 0,$$

en posant comme nouvelle matrice $B = A^2$.

Proposition 2. *Soient A, B, C trois matrices. On a, sous réserve de compatibilité des dimensions l'associativité, i.e.,*

$$ABC = (AB)C = A(BC).$$

Proposition 3. *Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$. On a $AI_n = I_m A = A$.*

Exercice 2. *Dans $M_n(K)$, faire le produit de matrice $E_{i,j}E_{k,l}$ (indiquer les coefficients (r, s) de cette matrice). On pourra essayer de calculer le produit lorsque $j \neq k$, puis lorsque $j = k$ (distinguer alors si $i = l$ ou si $i \neq l$).*

2.3 Distributivité

Proposition 4. *Soient A, B, C trois matrices et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a, sous réserve de compatibilité des dimensions, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :*

$$\begin{aligned} &A(B + C) = AB + AC \\ &(A + B)C = AC + BC \\ &\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B). \end{aligned}$$

On retiendra bien que si A, B sont deux matrices carré, on n'a PAS en général $AB = BA$!

Exercice 3. *Trouver les matrices $B \in M_n(K)$ telles que pour tout $A \in M_n(K)$ on ait $AB = BA$ (Indication : tester $A = E_{i,j}$ et écrire $B = \sum_{k,l} b_{k,l} E_{k,l}$).*

2.4 Transposition

Définition 9. *Soit* $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$*. On définit la transposée de* A*, notée* A^T*, par*

$$A^T = (a_{ji})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m} \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K}).$$

Les propriétés suivantes se vérifient facilement “à la main”.

Proposition 5.
1. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$*. On a* $(A + B)^T = A^T + B^T$*.*
2. *Soient* $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$*. On a* $(\alpha A)^T = \alpha A^T$*.*
3. *Soient* $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$*. On a* $(AB)^T = B^T A^T$*.*
4. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$*. On a* $(A^T)^T = A$*.*

On peut remarque qu’une matrice carré A est symétrique si et seulement si $A = A^T$. De même, une matrice carré A est anti-symétrique si et seulement si $A^T = -A$.

Exercice 4. *Que dire de la transposée d’une matrice triangulaire supérieur (resp. triangulaire inférieure) ? Montrer qu’étant donnée une matrice quelconque* $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$*, les produits* $A^T A$ *et* AA^T *sont des matrices symétriques.*

2.5 Trace d’une matrice carrée

Définition 10. *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. La trace de* A*, notée tr* A*, est le nombre*

$$tr\ A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Proposition 6.
1. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On a* $tr(A + B) = tr\ A + tr\ B$*.*
2. *Soient* $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$*. On a* $tr(\alpha A) = \alpha tr\ A$*.*
3. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On a* $tr(AB) = tr(BA)$*.*

Exercice 5. *Si* $A, B, P \in M_n(K)$ *et* P *est inversible (voir plus loin), montrer que* $Tr(P^{-1}AP) = Tr(A)$*.*

2.6 Puissance d’une matrice carrée

Définition 11. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* p *un entier. On définit*

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p\ facteurs},$$

avec la convention $A^0 = I_n$*.*

Remarque 2. *Attention à ne pas confondre avec la puissance des coefficients. Mais si* A *est diagonale, alors* $diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)^p = diag(\lambda_1^p, ..., \lambda_n^p)$*.*

Proposition 7. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent et p un entier. On a*

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k},$$

où les $C_p^k = \binom{p}{k} = \dfrac{p!}{(p-k)!k!}$ sont les coefficients binômiaux.

Démonstration. Par récurrence en utilisant les relations usuelles entre les coefficients binomiaux. □

De manière générale, noter que l'on a par exemple pour $p = 2$ et $p = 3$:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2$$

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= (A+B)^2(A+B) = (A^2 + BA + AB + B^2)(A+B)\\ &= A^3 + BA^2 + ABA + B^2A + A^2B + BAB + AB^2 + B^3\end{aligned}$$

3 Matrice d'un système linéaire, rang d'une matrice

On part de l'observation importante suivante. Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $b = (b_1, ..., b_m)^T \in \mathcal{M}_{m1}(\mathbb{K})$. Résoudre l'équation $Ax = b$ d'inconnue $x = (x_1, ..., x_n)^T$, est équivalent à résoudre le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. . \qquad (1)$$

On dit alors que A est la matrice du système (1).

Définition 12. *Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$. On définit le rang de A, noté rg A, comme le rang du système linéaire homogène $Ax = 0$ d'inconnue $x = (x_1, ..., x_n)^T$.*

Remarque 3. *La matrice identité I_n est de rang n. Toute matrice nulle est de rang nul.*

On admettra le résultat suivant.

Proposition 8. *Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$. On a rg $A^T =$ rg A.*

Pour montrer ce résultat, il est préférable de passer par les matrices équivalentes.

Définition 13. *Deux matrices $A \in M_{m,n}(K)$ et $B \in M_{m,n}(K)$ sont équivalentes si et seulement si il existe deux matrices inversibles, $P \in M_m(K)$, $Q \in M_n(K)$ telles que*

$$B = QAP.$$

On admet le résultat suivant.

Proposition 9. *Deux matrices A et B ont même rang si et seulement si elles sont équivalentes.*

Pour montrer la proposition 8, il faut montrer (par manipulations des matrices par des opérations élémentaires qui conservent le rang) que A et A^T sont équivalentes respectivement [1] à J_r et J_r^T elles mêmes équivalentes.

Tel que défini, le rang d'une matrice est le rang du système linéaire homogène. On a vu que le rang d'un système est inchangé lorsque l'on applique la méthode du pivot de Gauss (résolution du système linéaire homogène $Ax = 0$). Mettre sous forme échelonnée consiste à

• effectuer : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (ce qui correspond à une multiplication à gauche de A par la matrice de transvection $I_n + \lambda E_{i,j}$.

• effectuer : $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (ce qui correspond à une multiplication à gauche de A par la matrice de dilatation $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$.

On peut faire de même à droite et multiplier par des matrices similaires ce qui affecte cette fois les colonnes de A. Comme il s'agit d'opérations élémentaires sur le système $Ax = b$, le rang du système est inchangé. On déduit que le rang d'une matrice A est invariant par opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de A (En particulier, on a $rg(A) = rg(A^T)$). Le rang est un invariant par ce type d'opérations. Ceci conduit à la définition et à la proposition suivante.

4 Matrices inversibles

4.1 Définition

Définition 14. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. Dans ce cas, B est unique et est appelée matrice inverse de A, notée A^{-1}.*

Proposition 10. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = I_n$ ou $BA = I_n$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.*

Remarque 4. *Si A est inversible, alors $Ax = b \iff x = A^{-1}b$. La connaissance de A^{-1} permet donc de résoudre facilement n'importe quel système linéaire de matrice A.*

4.2 Calcul pratique de l'inverse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour savoir si A est inversible et, le cas échéant, calculer son inverse, on résout le système linéaire $Ax = y$ d'inconnue $x = (x_1, ..., x_n)^T$ et de second membre $y = (y_1, ..., y_1)^T$ quelconque. Si ce sytème admet une solution x^*, c'est que A est inversible. Sachant que $x^* = A^{-1}y$, on ontient A^{-1} par identification.

Proposition 11. *$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $rg\ A = n$.*

1. Par définition, la matrice $J_r \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ a r fois 1 sur sa diagonale et des zéros partout ailleurs.

4.3 Quelques règles de calcul

Proposition 12. *1. I_n est inversible d'inverse I_n.*

2. Si A est inversible alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

3. Si A, B sont inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4. Si A est inversible alors A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T =: A^{-T}$.

5. Si $A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, alors A est inversible si et seulement si tous les λ_i sont non nuls. On a alors $A^{-1} = diag(\lambda_1^{-1}, ..., \lambda_n^{-1})$.

Démonstration. Vérifications à la main. □

Autres exemples :
• Cas particulier pour une matrice $(2, 2)$. On verra grâce au déterminant que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ inversible}^{2} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

• une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Exercice 6. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle qu'il existe un entier $n > 1$ tel que $A^n = I_n$. Trouver l'inverse de la matrice $I_n - A$ (chercher avec des sommes de puissances de A).*

5 Exemple d'inversion de matrice

On veut inverser

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On écrit le système linéaire $Ax = y$ associé dans $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 & = y_1 \\ -x_1 + x_3 + x_4 & = y_2 \\ -x_1 - x_2 + x_4 & = y_3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 & = y_4 \end{cases}$$

Par la méthode du pivot de Gauss, on résout ce système en fonction de y :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = -y_4 \\ -x_1 + x_3 + x_4 & = y_2 \\ -x_1 - x_2 + x_4 & = y_3 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + & x_2 + & x_3 & & = -y_4 \\ & x_2 + & 2x_3 + & x_4 & = y_2 - y_4 \\ & x_2 + & x_3 + & x_4 & = y_1 \\ & & x_3 + & x_4 & = y_3 - y_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + & x_2 + & x_3 & & = -y_4 \\ & x_2 + & x_3 + & x_4 & = y_1 \\ & & x_3 & & = y_2 - y_4 - y_1 \\ & & x_3 + & x_4 & = y_3 - y_4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + & x_2 + & x_3 & & = -y_4 \\ & x_2 + & x_3 + & x_4 & = y_1 \\ & & x_3 & & = y_2 - y_4 - y_1 \\ & & & x_4 & = y_1 - y_2 + y_3 \end{cases}$$

En utilisant que $x_2 = y_1 - (x_3 + x_4)$ et $x_1 = -y_4 - (x_2 + x_3)$, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{llllll} x_1+ & x_2+ & x_3 & & = -y_4 \\ & x_2 & & & = y_1 - y_3 + y_4 \\ & & x_3 & & = y_2 - y_4 - y_1 \\ & & & x_4 & = y_1 - y_2 + y_3 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lllll} x_1 & & & & = -y_2 + y_3 - y_4 \\ & x_2 & & & = y_1 - y_3 + y_4 \\ & & x_3 & & = -y_1 + y_2 - y_4 \\ & & & x_4 & = y_1 - y_2 + y_3 \end{array}\right.$$

De cette manière, on a exprimé la solution x en fonction de y ce qui permet de lire la matrice inverse A^{-1}.

Conclusion :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$