Université d'Avignon - Faculté des sciences Année 2018-2019
L3-S5 Algèbre générale 1

Contrôle continu n° 1

Durée 1h20

Tous documents, calculatrices et téléphones interdits.

Une rédaction précise et concise sera récompensée.

Questions de cours

1) Quels sont les sous-groupes de $\mathbb{Z}$? **(0.5p)**
2) Si dans un groupe de neutre e, un élément a est d'ordre p et que pour un entier n on a $a^n = e$, quelle est la relation entre n et p. **(0.5p)**
3) Que dire de l'intersection de deux sous-groupes ? de l'union ? (le prouver) **(2p)**.

Exercice 1

On considère l'ensemble de matrices 3x3 suivant

$$H_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

1) Montrer que H_3 (muni la multiplication de matrices) est un groupe. **(2p)**
2) Montrer que H_3 contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{R}$. **(1p)**
3) Trouver le centre de H_3 (les éléments qui commutent avec tous les autres). **(2p)**

Exercice 2

On considère le sous-ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.
1) Trouver un morphisme de groupe surjectif entre le groupe additif $\mathbb{R}$ et le groupe multiplicatif $\mathbb{U}$. **(1p)**
2) Donner le noyau de ce morphisme. **(1p)**
3) Quelle loi peut on mettre sur $[0, 2\pi[$ afin d'en faire un groupe. **(2p)**

»»> **TOURNEZ SVP** »»>

Exercice 3

Soit n un entier $n \geq 2$. On rappelle que le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ peut être vu comme l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, k < n\}$, muni de l'opération

$$i \bar{+} j := \text{ le reste de la division euclidienne de } i + j \text{ par } n.$$

On note $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ l'ensemble des éléments k de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour lesquels le sous-groupe $\langle k \rangle$ engendré par k est le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tout entier. On définit l'application $\bar{\times}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui à deux éléments p, q de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ associe le reste de la division euclidienne par n du produit pq.

0) Soient $i, j, k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, à quoi correspond $i \bar{+} j \bar{+} k$? 3i ? **(1.5p)**

1) Soit k un élément quelconque de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que k appartient à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ si et seulement si il existe il existe un élément l de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $k \bar{\times} l = 1$. **(2p)**

2) Montrer que k appartient à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ si et seulement si k est premier avec n. **(1p)**

3) Montrer que $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \bar{\times})$ est un groupe. **(2p)**

4) Montrer que, pour tout $n \leq 7$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ est un groupe cyclique (faire une étude cas-par-cas : $n = 2$, puis $n = 3$, puis...) **(2p)**