Algèbre générale 1 2018-19

CC1 corrigé succinct

Ex 1

1) Montrons que $H_3(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$:

- $I_3 \in H_3(\mathbb{R})$
- Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R})$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & a' & c' \\ 0 & 1 & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R})$

$$MM' = \begin{pmatrix} 1 & a+a' & c+c'+ab' \\ 0 & 1 & b+b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R})$$

$$\text{et } M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -c+ab \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R})$$

2) $\mathbb{R} \xhookrightarrow{\phi} H_3(\mathbb{R})$, $a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\mathbb{R} \xhookrightarrow{\psi} H_3(\mathbb{R})$, $b \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\mathbb{R} \xhookrightarrow{\varphi} H_3(\mathbb{R})$, $c \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Avec les notations de la question 1) on a $\forall M' \in H_3(\mathbb{R})$, $MM' = M'M$
ssi $\forall a', b' \in \mathbb{R}$, $ab' = a'b$ ssi $a = b = 0$ ($(a',b') = (1,0)$ donne $b=0$ par ex.)
ainsi le centre de $H_3(\mathbb{R})$ est $\operatorname{Im} \varphi$

Ex 2

1) $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$, $x \longmapsto e^{ix}$ surjectif d'évidence et $\forall x, y \in \mathbb{R}$,
$\phi(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = \phi(x)\phi(y)$

2) $x \in \ker \phi \iff \phi(x) = 1 \iff e^{ix} = 1 \iff x \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ donc $\ker \phi = 2\pi\mathbb{Z}$

3) $\psi := \phi_{|[0,2\pi[} : [0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{U}$ est une bijection, il suffit alors de transporter la loi sur $\mathbb{U}$ en posant $\bigwedge_{\forall x,y \in [0,2\pi[}$ $x \tilde{+} y = \psi^{-1}(e^{ix}e^{iy})$

$$= \begin{cases} x+y & \text{si } x+y < 2\pi \\ x+y-2\pi & \text{si } x+y \geq 2\pi \end{cases}$$

Ex 3 :

0) $i \bar{+} j \bar{+} k$ = reste de la division euclidienne de $i+j+k$ par n (s'inspirer de A en 3) pour la preuve)
dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $3i$ est le ———— $3i$ ——

1) • Si $\langle k \rangle = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, en particulier il existe $a \in \mathbb{Z}$ tq $ak = 1$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,
ainsi $\exists b \in \mathbb{Z}$ tq $ak = 1 + nb$ or par division euclidienne,
$a = nq + \ell$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on obtient $\ell k = 1 + n(b - aq)$
ainsi $\ell \bar{\times} k = 1$

• réciproquement si $\ell \bar{\times} k = 1$ alors $\exists c \in \mathbb{Z}$ tq $\ell k = 1 + nc$ donc
$\forall p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $p\ell k = p + ncp$ d'où $(p\ell)k = p$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ donc $p \in \langle k \rangle$

2) Bezout

3) DI : Soient $k, k' \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ $\exists p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$ tq $\begin{cases} pk + qn = 1 \\ p'k' + q'n = 1 \end{cases} \Rightarrow pp'kk' + nQ = 1$
or $kk' = nQ' + k \bar{\times} k'$ par division euclidienne ainsi $k \bar{\times} k' \wedge n = 1$ (Bezout)

A : $\forall i, j, k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $(i \bar{\times} j) \bar{\times} k = r$ où par division euclidienne
$(i \bar{\times} j)k = nq + r$ mais par division euclidienne $ij = nq' + i \bar{\times} j$
ainsi $ijk = n(q + kq') + r$ donc r est le reste de la division

euclidienne de ijk par n, par symétrie on a

$$(i \bar{\times} j) \bar{\times} k = (j \times k) \bar{\times} i$$

et le produit $\bar{\times}$ étant clairement commutatif on obtient l'associativité.

N : 1
O : question 1)

4) $n=2$ $\quad (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^* = \{1\}$

$n=3$ $\quad (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^* = \{1,2\} = \{2^0, 2^1\}$

$n=4$ $\quad (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* = \{1,3\} = \{3^0, 3^1\}$

$n=5$ $\quad (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* = \{1,2,3,4\}$ or $4 = 2 \bar{\times} 2$ et $3 = 2 \bar{\times} 2 \bar{\times} 2$

$n=6$ $\quad (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^* = \{1, 5\}$

$n=7$ $\quad (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* = \{1,2,3,4,5,6\}$ or $3 \bar{\times} 3 = 2$

$3^3 = 3 \bar{\times} 3 \bar{\times} 3 = 2 \bar{\times} 3 = 6$

$3^4 = 3 \bar{\times} 3 \bar{\times} 3 \bar{\times} 3 = 6 \bar{\times} 3 = 4$

$3^5 = 4 \bar{\times} 3 = 5$

donc $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* = \{3^0, 3^1, \dots, 3^5\}$