Université d'Avignon - Faculté des Sciences | Année 2019-2020
Licence de mathématiques - S5 | Algèbre générale 1

Epreuve de contrôle continu n$^{\circ}$1
Durée 1h20
Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Le barème est donné à titre indicatif.

Question de cours (2 points) : Soit G et G' deux groupes et, $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Montrer que l'image par f d'un sous-groupe de G est un sous-groupe de G'.

Exercice 1. (5 points) Soit H l'ensemble des matrices de type $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -x^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que H muni du produit de matrices est un groupe commutatif.

(2) On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to H$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -x^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que φ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(H, \times)$.

(3) Montrer que les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(H, \times)$ sont isomorphes.

Exercice 2. (4 points) Soit $G = \{e, a, b, c, d\}$ un groupe d'ordre 5 d'élément neutre e.

(1) Quel est l'ordre d'un élément de G ?

(2) Le groupe G est-il monogène ? abélien ?

(3) Montrer qu'il existe un unique groupe d'ordre 5 à un isomorphisme près.

Exercice 3. (6 points) Pour n entier naturel non nul, on définit "$(Z/nZ, \oplus)$" comme l'ensemble des entiers $\{0, ..., n-1\}$ munis de l'opération $i \oplus j =$ reste de la division euclidienne de $i + j$ par n.

(1) (Re)démontrer que "$(Z/nZ, \oplus)$" est un groupe.

(2) (Re)montrer que $p \in \{0, ..., n-1\}$ est un générateur de "$(Z/nZ, \oplus)$" ssi p est premier avec n.

(3) Si p et q sont des entiers naturels non nuls et que $n = pq$, quel est le sous-groupe engendré par p dans "$(Z/nZ, \oplus)$" ?

Exercice 4. (3 points)

Déterminer, en le justifiant, pour dans chacun des cas suivants quel est le sous-groupe $\langle X \rangle$ engendré par la partie X de "$(Z/18Z, \oplus)$" :

–1. $X = \{0\}$
–2. $X = \{1\}$
–3. $X = \{0, 9\}$
–4. $X = \{2, 3\}$
–5. $X = \{17\}$