Université d'Avignon - Faculté des sciences Année 2020-2021
L3-S5 Algèbre générale 1

Contrôle continu n° 1

Durée 1h20

Tous documents, calculatrices et téléphones interdits.

Une rédaction précise et concise sera récompensée.

Questions de cours

1) Quels sont les sous-groupes de $\mathbb{Z}$? **(0.5p)**
2) Si dans un groupe de neutre e, un élément a est d'ordre p et que pour un entier n on a $a^n = e$, quelle est la relation entre n et p ? **(0.5p)**
3) Que dire de l'intersection de deux sous-groupes ? de l'union ? (le prouver) **(2p)**.

Exercice 1

On considère l'ensemble de matrices 3x3 suivant

$$H_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

1) Montrer que H_3 (muni la multiplication de matrices) est un groupe. **(2p)**
2) Montrer que H_3 contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{R}$. **(2p)**

Exercice 2

On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^*$ qui à x associe e^{ix}.
1) Montrer que ϕ est un morphisme de groupe. **(1p)**
2) Donner le noyau et l'image de ϕ. **(2p)**
3) Quelle loi peut on mettre sur $[0, 2\pi[$ afin d'en faire un groupe ? **(2p)**

»»> **TOURNEZ SVP** »»>

Exercice 3

On rappelle que le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ peut être vu comme l'ensemble $\{0, 1\}$, muni de l'opération

$$i \oplus j := \text{ le reste de la division euclidienne de } i + j \text{ par } 2.$$

0) Quel est l'opposé de 1 (noté -1) dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? **(0.5p)**

Pour $a, b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ on notera ab leurs produit usuel.

On désigne par G l'ensemble des matrices carrées de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de déterminant non-nul (dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), *i.e.* l'ensemble des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

où a, b, c, d sont des éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tels que $ad \oplus (-bc) \neq 0$.

On note $\circ$ la loi de composition interne sur G, inspirée du produit usuel de matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' \oplus bc' & ab' \oplus bd' \\ ca' \oplus dc' & cb' \oplus dd' \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe. **(2p)**
2) Quel est l'ordre de G ? (on pourra donner la liste complète des éléments de G) **(1.5p)**
3) Calculer l'ordre de chaque élément de G. **(1.5p)**
4) Montrer que G n'est pas cyclique, mais que tout sous-groupe de G est soit cyclique, soit égal à G tout entier. **(2.5p)**