AG1 L355 CC2 corrigé succinct 2020-21

EX1 . idem TD

EX2 . ———

EX3 . $1 = 0\times 12 + 1$ ainsi $\phi(1)=1$

1) $\forall i,j \in \mathbb{Z}$ par division euclidienne $i = q_i \times 12 + \phi(i)$
$j = q_j \times 12 + \phi(j)$

donc $i+j = (q_i+q_j)\times 12 + \phi(i)+\phi(j)$

or $\phi(i)+\phi(j) = q_+ \times 12 + \phi(i)\oplus\phi(j)$ par division euclidienne

ainsi $i+j = (q_i+q_j+q_+)\times 12 + \phi(i)\oplus\phi(j)$ avec

$\phi(i)\oplus\phi(j) \in \{0,..,11\}$ donc $\phi(i)\oplus\phi(j) = \phi(i+j)$

de même $ij = \underbrace{(12\, q_i q_j + q_i \phi(j) + q_j \phi(i))}_{q} \times 12 + \phi(i)\phi(j)$

or $\phi(i)\phi(j) = q_\times \times 12 + \phi(i)\otimes\phi(j)$ par div. eucl.

ainsi $ij = (\ q + q_\times\ )\times 12 + \phi(i)\otimes\phi(j)$ avec

$\phi(i)\otimes\phi(j) \in \{0,\dots,11\}$ donc $\phi(i)\otimes\phi(j) = \phi(ij)$

ainsi ϕ morphisme d'anneau (donc de groupe).

2) $\ker\phi = 12\mathbb{Z} \neq \{0\}$ donc ϕ non injectif

$\mathrm{Im}\,\phi = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ car $\forall j \in \{0,..,11\}$ $\phi(j) = j$

3) Les $p\mathbb{Z}$ pour $p \in \mathbb{N}$

4) $\phi^{-1}(I)$ idéal de $\mathbb{Z}$ donc $\phi^{-1}(I) = p\mathbb{Z}$ pour un $p \in \mathbb{Z}$

5) Par def. de $\phi^{-1}(I)$ on a $\phi(\phi^{-1}(I)) \subset I$ et réciproquement

si $x \in I$, $x \in \{0,..,11\}$ alors $\phi(x) = x$ donc $x \in \phi^{-1}(I)$

et $x = \phi(x) \in \phi(\phi^{-1}(I))$.

6) si I idéal de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $I = \phi(p\mathbb{Z})$ pour un $p \in \mathbb{N}$

or $\phi(p\mathbb{Z}) = \phi(p)\otimes\phi(\mathbb{Z}) = \phi(p)\ \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = q\ \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ avec $q \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

ainsi I est un idéal principal donc

$I = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $\{0,2,4,6,8,10\}$, $\{0,3,6,9\}$, $\{0,4,8\}$, $\{0,6\}$, $\{0\}$

Ex4 : correction en TD (fin de feuille 2)