corrigé succinct CC3 2018-19 Algèbre générale 1

Ex1 : Voir cours : application directe de : matrice d'un endomorphisme, forme de Jordan, polynôme minimal, ...

Ex2 : voir ex 7 du TD

Ex3 : $a : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $X \mapsto AX$ $\qquad$ $b : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $X \mapsto BX$ $\qquad$ $AB = BA \iff a \circ b = b \circ a$

1) si $X \in E_a(\lambda)$, $a(X) = \lambda X$ et $b(a(X)) = b(\lambda X) = \lambda b(X)$ donc $b(X) \in E_a(\lambda)$

2) soit $u \in End(E_a(\lambda))$ l'endomorphisme induit par b sur un s.e.p. de a
$P_u \in \mathbb{C}[X]$ donc u possède une v.p : $\exists \mu \in \mathbb{C}$ et $X \in E_a(\lambda) \setminus \{0\}$ tq $u(X) = \mu X$
or $X \in E_a(\lambda)$ donc $a(X) = \lambda X$ (et $b(X) = \mu X$)

3) $a \circ b = b \circ a$ donc $A'B' = B'A'$ d'où $\begin{pmatrix} \alpha\beta & * \\ 0 & A_1B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\alpha & * \\ 0 & B_1A_1 \end{pmatrix}$

4) si $\exists P_1 \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ tq $P_1^{-1}A_1P_1 = T_A$ triangulaire supérieure
et $P_1^{-1}B_1P_1 = T_B$ " "

alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C})$ et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & T_A \end{pmatrix}$

$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \beta & * \\ 0 & T_B \end{pmatrix}$

ainsi le résultat découle d'une récurrence sur n.