Algèbre générale 1, CC 3 2019-20 corrigé succinct

**EX 1** : A) $P_u$ polynôme de degré 4, de coef. dominant $(-1)^4$ et de racine $\lambda$ de multiplicité 4

donc $P_u = (\lambda - X)^4$ est scindé donc $u$ trigonalisable

B)

- $A = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ $\forall \vec{e} \in \mathcal{B}, u(\vec{e}) = \lambda \vec{e}$ $\mu_u = X - \lambda$ car $A - \lambda I = 0$, $\ker \underbrace{(u-\lambda I)^j}_{=0} = E$ si $j \geq 1$ de dim 4

- $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda & 0 & 0 \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ $\forall \vec{e} \in \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ $u(\vec{e}) = \lambda \vec{e}$, $u(\vec{l}) = \lambda \vec{l} + \vec{k}$ $\mu_u = (X-\lambda)^2$ car $A - \lambda I \neq 0$ et $(A - \lambda I)^2 = 0$

$\ker(u - \lambda I) = \text{vect}\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de dim 3

si $m \geq 2$, $\ker \underbrace{(u-\lambda I)^m}_{=0} = E$ de dim 4

$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ & \lambda & 0 & 0 \\ & & \lambda & 0 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda & 1 & 0 \\ & & \lambda & 0 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ sont du m̂ type

- $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda & 1 & 0 \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ $u(\vec{i}) = \lambda \vec{i}$, $u(\vec{j}) = \lambda \vec{j}$, $u(\vec{k}) = \lambda \vec{k} + \vec{j}$, $u(\vec{l}) = \lambda \vec{l} + \vec{k}$

$\mu_u = (X - \lambda)^3$

$\ker(u - \lambda I) = \text{vect}\{\vec{i}, \vec{j}\}$ de dim 2

$\ker(u - \lambda I)^2 = \text{vect}\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ — 3

$\ker \underbrace{(u - \lambda I)^m}_{=0} = E$ si $m \geq 3$, $E$ de dim 4

$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ est du m̂ type

- $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ & \lambda & 0 & 0 \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ $u(\vec{i}) = \lambda \vec{i}$, $u(\vec{j}) = \lambda \vec{j} + \vec{i}$, $u(\vec{k}) = \lambda \vec{k}$, $u(\vec{l}) = \lambda \vec{l} + \vec{k}$

$\mu_u = (X - \lambda)^2$

$\ker(u - \lambda I) = \text{vect}\{\vec{i}, \vec{k}\}$ de dim 2

$\ker \underbrace{(u - \lambda I)^m}_{=0} = E$ si $m \geq 2$, $E$ de dim 4

- $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ & \lambda & 1 & 0 \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ $u(\vec{i}) = \lambda \vec{i}$, $u(\vec{j}) = \lambda \vec{j} + \vec{i}$, $u(\vec{k}) = \lambda \vec{k} + \vec{j}$, $u(\vec{l}) = \lambda \vec{l} + \vec{k}$

$\mu_u = (X - \lambda)^4$

$\ker(u - \lambda I) = \text{vect}\{\vec{i}\}$ de dim 1

$\ker(u - \lambda I)^2 = \text{vect}\{\vec{i}, \vec{j}\}$ — 2

$\ker(u - \lambda I)^3 = \text{vect}\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ — 3

$\ker \underbrace{(u - \lambda I)^m}_{=0} = E$ si $m \geq 4$, — 4

**EX 2** : voir ex 7 du TD

Ex 2 :

1) $P_u = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ -1 & -X & -1 \\ 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3}{=} -X \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -X & -1 \\ 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} -X \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-X & 0 \\ 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix} = -X(1-X)^2$ scindé donc u trigonalisable

2) $\mu_u = X(X-1)$ ou $X(X-1)^2$ mais $A(A-I) \neq 0$ donc $\mu_u = P_u$ n'a pas que des racines simples donc u non diagonalisable

3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker u \iff \begin{cases} x+y=0 \\ -x-z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{U}$ donc $\ker u = \mathrm{vect}\{U\}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(u-id) \iff \begin{cases} y=0 \\ -x-y-z=0 \\ -y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases}$ $\quad \ker(u-id) = \mathrm{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ on trouve $\ker(u-id)^2 = \mathrm{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

Soit $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(W)$ est une base d'un supplémentaire de $\ker(u-id)$ dans $\ker(u-id)^2$

Soit $V = (u-id)W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $(u-id)V = 0$ et $V \neq 0$ $(V)$ base de $\ker(u-id)$

Soit $\mathcal{C} = (U, V, W)$ alors $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$

4) $P^{-1}AP = T$

5) $C^n = (I_2+N)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k I_2^{n-k} = C_n^0 I_2 + C_n^1 N + 0$

$= I_2 + nN = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6) $A^n = PT^nP^{-1}$ où on calcule $P^{-1}$ en résolvant $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ par ex.

ici $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Ex3** : 1) Si $\exists \beta$ base de E tq $\mathcal{M}_\beta(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors $P_u = \underbrace{(\lambda_1 - X) \cdots (\lambda_n - X)}_{\text{scindé}}$

2) a) $\exists \lambda$ vlp de $u$ et $e_1$ vtp de $u$ associé à $\lambda$, on le complète en une base de E $(e_1, \dots, e_n)$ alors $u(e_1) = \lambda e_1$ et $u(e_k) = CL$ de $e_1, \dots, e_n$ si $k \in \{2, \dots, n\}$

d'où la matrice M avec $L = (\ell_1 \dots \ell_{n-1})$ $A = (a_{ij})$

b) $\forall k \in \{2, \dots, n\}$ $w(e_k) = p(v(e_k)) = p(u(e_k))$

or $u(e_k) = \underbrace{\ell_{k-1} e_1}_{\in G} + \underbrace{a_{k1} e_2 + \cdots a_{k(n-1)} e_n}_{\in F}$

donc $w(e_k) = a_{k1} e_2 + \cdots + a_{k(n-1)} e_n$ et $\mathcal{M}_{(e_2, \dots, e_n)}(w) = A$

$P_u = (\lambda - X) P_A = (\lambda - X) P_w$ et $P_u$ est scindé donc $P_w$ est scindé

c) $u(e'_k) \underset{\substack{\uparrow \\ v = u_{/F} \text{ et } e'_k \in F}}{=} v(e'_k) = \underbrace{p(v(e'_k))}_{w(e'_k)} + \underbrace{q(v(e'_k))}_{\in G}$ donc $\exists \alpha_k$ tq. ....

d) $\underline{e'_2, \dots, e'_n \text{ base de F qui trigonalise } w}$ $\Leftrightarrow$ tq $\forall k \in \{2, \dots, n\}$ $w(e'_k) \in \text{Vect}\{e'_2, \dots, e'_k\}$

donc $\forall k \in \{2, \dots, n\}$, $u(e'_k) \in \text{vect}\{e_1, e'_2, \dots, e'_n\}$

or $u(e_1) = \lambda e_1 \in \text{vect}\{e_1\}$

ainsi $(e_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une base qui trigonalise $u$.

3) Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété :

$P_n$ : $\forall E$ $\mathbb{K}$ev de dim $n$, $\forall u \in \text{End}(E)$ : $P_u$ scindé $\Leftrightarrow$ $u$ trigonalisable

$P_1$ est vraie d'évidence et par 1) et 2) si $P_{n-1}$ vraie alors $P_n$ l'est