**Ex1**

1. cours
2. Existence par surjectivité dans le Th. restes chinois
   Solution unique uniquement modulo $11 \times 15$
3. Par l'algorithme d'Euclide (étendu) on trouve $11(\overset{u}{\overbrace{-4}}) + 15(\overset{v}{\overbrace{3}}) = 1$
   Une solution de (S) est $x_0 = 3 \times 3 \times 15 + 4 \times (-4) \times 11 = -41$
   donc les solutions sont $x = -41 + k \times 11 \times 15$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

**Ex 2**

1. Cours
2. Si $3 = (a + ib\sqrt{5})(c + id\sqrt{5})$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ alors
   $9 = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2)$ si $b$ et $d$ sont non nuls le membre de droite est $\geq 25$ donc $d$ ou $b = 0$ par exemple $d = 0$ ainsi
   $3 = ac + ibc\sqrt{5}$ donc $ac = 3$ et $bc = 0$ d'où $b = 0$ et
   $(a, c) = (1, 3)$ ; $(-1, -3)$ ; $(3, 1)$ ; $(-3, -1)$ avec $1$ et $-1$ inversibles
3. $3$ divise $(2 + i\sqrt{5})(2 - i\sqrt{5}) = 9$ mais $3$ ne divise ni $2 + i\sqrt{5}$, ni $2 - i\sqrt{5}$ en effet par exemple si $3 = (2 + i\sqrt{5})(a + ib\sqrt{5})$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ alors $9 = 9(a^2 + 5b^2)$ donc $a = \pm 1$ et $b = 0$ mais $3 \neq \pm(2 + i\sqrt{5})$

**Ex 3** A) La matrice étant diagonale par bloc on peut raisonner bloc par bloc.

1. $P_u(X) = -(2 - X)^2 (3 - X)^5$ $\qquad \mu_u(X) = (X - 2)^2 (X - 3)^3$
2. $\dim \ker(u - 2\,\mathrm{Id}) = 1$, $\dim \ker(u - 2\,\mathrm{Id})^{n} \underset{n \geq 2}{=} 2$ $\quad \dim \ker(u - 3\,\mathrm{Id}) = 3$, $\dim \ker(u - 3\,\mathrm{Id})^2 = 4$
   $\ker(u - 3\,\mathrm{Id})^{n} \underset{n \geq 3}{=} 5$ et pour toute autre valeur de $\lambda$ et $n$ on a $\dim \ker(u - \lambda\,\mathrm{Id})^n =$
3. $$J^n = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1} n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} & & & 0 \\ & (3^n) & & \\ & & (3^n) & \\ 0 & & & \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1} n & 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 3^n & 3^{n-1} n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad e^{tJ} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} & & & 0 \\ & e^{3t} & & \\ & & e^{3t} & \\ 0 & & & \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} & \frac{t^2}{2} e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

B)

1. • Si $x \in \ker(v - 2\,\mathrm{Id})^2 \cap \ker(v - 3\,\mathrm{Id})^2$ alors
   $v^2(x) - 4v(x) + 4x = 0$ et $v^2(x) - 6v(x) + 9x = 0$ donc par différence
   $2v(x) - 5x = 0$ d'où $v(x) = \frac{5}{2} x$ et $\frac{5^2}{2^2} x - 4 \times \frac{5}{2} x + 4x = 0$ d'où $x = 0$
   • Par exemple si $(v - 2I)^2(x) = 0$ alors $(v - 2I)^2(v(x)) = v\left((v - 2I)^2(x)\right) = v(0) = 0$
2. Soit $(v_3)$ base d'un supplémentaire de $\ker(v - 2I)$ dans $\ker(v - 2I)^2$
   puis $v_2 = (v - 2I)(v_3) \in \ker(v - 2I) \setminus \{0\}$ et $v_1$ tq $(v_1, v_2)$ base de $\ker(v - 2I$
   soit $(w_2, w_4)$ base d'un supplémentaire de $\ker(v - 3I)$ dans $\ker(v - 3I)^2$
   puis $w_1 = (v - 3I)(w_2)$ et $w_3 = (v - 3I)(w_4)$
   soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3, w_4)$

---

alors $$M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

3. $P_v(X) = (X - 2)^3 (X - 3)^4$
   $\mu_v(X) = (X - 2)^2 (X - 3)^2$