Algèbre Générale 1, L3 Maths. (2021-22)
TD4 - Corrigé

Fernando Costa

Exo. 1 a) Clairement 5 et 1 sont deux valeurs propres de A (ça se voit par un calcul mental de $\det(XI-A)$ ou en remarquant que A devient diagonal par opération des lignes 2 et 3).

$e_1=(1,0,0,0)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 5. L'espace $\langle e_1\rangle$ généré par e_1 est invariant par l'endomorphisme u associé à A. Si $F=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$, F est également invariant par u.

b) La matrice B répresente la matrice de $u|_F : F\to F$.

Exo. 2 (1) On trouve

$$P_A(X)=\det(XI-A)=\begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ 3 & X+4 & 3 \\ 3 & -6 & X-5 \end{vmatrix}$$

$$=(X-2)\left[(X+4)(X-5)+18\right]$$

$$=(X-2)\left[X^2-X-20+18\right]$$

$$=(X-2)\left[X^2-X-2\right]$$

$$=(X-2)(X+1)(X-2)$$

$$\Rightarrow P_A(X)=(X-2)^2(X+1).$$

Exo. 2 (2) 2 et -1 sont les valeurs propres de A. On veut montrer que $\dim \operatorname{Ker}(2I-A)=2$.

On trouve

$$2I-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\-3&6&-3\\-3&6&-3\end{pmatrix}\Rightarrow \dim \operatorname{Rang}(2I-A)=1$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(2I-A)=2.$$

Par conséquent,

$$\dim E(2)+\dim E(-1)=2+1=3$$

et donc A est diagonalizable.

On voit que

$$E(2)=\operatorname{Ker}(2I-A)=\{(x,y,z) : x-2y+z=0\}$$

Donc $(0,1,2)$ et $(1,0,-1)$ forment une base de $E(2)$. Pour $E(-1)$ on a

$$-1\cdot I-A=\begin{pmatrix}-3&0&0\\-3&3&-3\\-3&6&-6\end{pmatrix}\Rightarrow (0,1,1)\in E(-1).$$

Ainsi, $\{(0,1,2),(1,0,-1),(0,1,1)\}$ est une base pour laquelle A est diagonale, la matrice de passage étant

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\2&-1&1\end{pmatrix}. \qquad \boxed{P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}}$$

Exo. 3 On suppose que $u \circ v = v \circ u$.

a) On voit que, pour tout $x \in E(u, \lambda_i)$,

$$\begin{aligned} u(v(x)) &= (u \circ v)(x) \\ &= (v \circ u)(x) \\ &= v(u(x)) \\ &= v(\lambda_i x) \\ &= \lambda_i v(x), \end{aligned}$$

donc $v(x) \in E(u, \lambda_i)$, c'est-à-dire, $E(u, \lambda_i)$ est stable par v.

b) On suppose $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Alors $\dim E(u, \lambda_i) = 1$ pour tous $i = 1, \dots, n$. Puisque $E(u, \lambda_i)$ est stable par v, on sait que $v|_{E(u,\lambda_i)} : E(u, \lambda_i) \to E(u, \lambda_i)$ est bien défini. Le polynome caractéristique $P_{v|_{E(u,\lambda_i)}}$ de $v|_{E(u,\lambda_i)}$, étant d'ordre 1, admet une racine λ_i'. Si $x_i \in E(u, \lambda_i)$ est un vecteur propre de $v|_{E(u,\lambda_i)}$, alors x_i est vecteur propre commun à u et v. Cela est vrai pour $i = 1, \dots, n$ et, donc, u et v sont tous les deux diagonalizables et $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ forme une base base de E dans laquelle u et v sont diagonales:

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n' \end{pmatrix}.$$

<u>Exo. 4</u> On écrit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. Par hypothèse, $a_0 \neq 0$. Alors

$$P(u) = 0 \Rightarrow a_0 \, id_E + a_1 u + \cdots + a_n u^n = 0$$

$$\overset{a_0 \neq 0}{\Longrightarrow} \frac{-a_1}{a_0} u + \frac{-a_2}{a_0} u^2 + \cdots + \frac{-a_n}{a_0} u^n = id_E$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u\left(\frac{-a_1}{a_0} id_E + \frac{-a_2}{a_0} u + \cdots + \frac{-a_n}{a_0} u^{n-1}\right) = id_E \\ \left(\frac{-a_1}{a_0} id_E + \frac{-a_2}{a_0} u + \cdots + \frac{-a_n}{a_0} u^{n-1}\right) u = id_E . \end{cases}$$

Donc u est inversible ($\Leftrightarrow$ bijectif) et $u^{-1} = Q(u)$ où

$$Q(X) = \frac{-a_1}{a_0} + \frac{-a_2}{a_0} X + \cdots + \frac{-a_n}{a_0} X^{n-1}$$

est un polynôme de degré $n-1$.

<u>Exo. 5</u> (1) Toute matrice 1×1 est triangulaire, donc le résultat est vrai pour $\dim E = 1$.

(2) On suppose le résultat vrai en dimension n. Soit E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$. On suppose que P_u est scindé, où $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) Étant scindé, P_u a au moins une racine, donc u a au moins une valeur propre λ_1. Soit e_1 vecteur propre associé à λ_1 est soit $\mathcal{B}$ base de E dont le premier vecteur est e_1.

On pose $A = \mathrm{Mat}(u; \mathcal{B})$, d'où

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & B \end{pmatrix}, \qquad (\star)$$

avec $b = (a_{1,2} \ a_{1,3} \ \cdots \ a_{1,n+1}) \in M_{1,n}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$, $b_{i,j} = a_{i+1, j+1}$.

b) D'après $(\star)$,

$$P_u = P_A = (X - \lambda_1) \cdot \det(X I_n - B) = (X - \lambda_1) P_B.$$

Puisque P_u est scindé, on trouve que P_B est aussi scindé. Par l'hypothèse de récurrence, B est trigonalizable, donc il existe $Q \in M_n(\mathbb{K})$ inversible et $T \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure telles que $Q^{-1} B Q = T$.

c) On pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{K}).$$

Alors $\det P = 1 \cdot \det Q \neq 0$, donc P est inversible. En effet,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,
$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & bQ \\ 0 & Q^{-1} B Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & bQ \\ 0 & T \end{pmatrix}$$
est triangulaire supérieure. Par le principe de recurrence, la preuve est finie

Exo. 6 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1) On calcule d'abord P_A :

$$P_A(X) = \det(XI_3 - A) = \det\begin{pmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & 0 & X-1 \end{pmatrix}$$

$$= (X-1)\cdot\det\begin{pmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{pmatrix} = (X-1)(X^2-1)$$

$$\Longrightarrow P_A(X) = (X-1)^2(X+1).$$

Puisque

$$(A-I_3)(A+I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0_{M_3(\mathbb{R})},$$

on trouve que $P_A = \mu_A$. (Cayley-Hamilton)

(2) On a $\mu_A(X) = (X-1)^2(X+1) = (X^2-2X+1)(X+1) =$
$= X^3 - X^2 - X + 1$ et $\mu_A(A) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$, d'où

$$A^3 - A^2 - A + I_3 = 0 \Rightarrow -A^3 + A^2 + A = I_3$$
$$\Rightarrow A(-A^2 + A + I) = I_3$$
$$\Rightarrow A^{-1} = -A^2 + A + I_3.$$

En plus,

$$A^3 - A^2 - A + I = 0 \Rightarrow A^3 = A^2 + A - I_3.$$

Maintenant, on calcule $X^4 \div \mu_A(X)$:

$$\begin{array}{l|l} X^4 & X^3 - X^2 - X + 1 \\ \hline -(X^4 - X^3 - X^2 + X) & X + 1 \\ \hline 0 + X^3 + X^2 - X & \\ \quad -(X^3 - X^2 - X + 1) & \\ \hline \quad 0 + 2X^2 + 2X - 1 & \end{array}$$

Donc

$$X^4 = (X+1)\mu_A(X) + 2X^2 + 2X - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^4 = (A + I_3)\underbrace{\mu_A(A)}_{=0} + 2A^2 + 2A - I_3$$

$$\Rightarrow A^4 = 2A^2 + 2A - I_3.$$

Similairement, on calcule $X^5 \div \mu_A(X)$:

$$\begin{array}{l|l} X^5 & X^3 - X^2 - X + 1 \\ \hline -(X^5 - X^4 - X^3 + X^2) & X^2 + X + 2 \\ \hline 0 + X^4 + X^3 - X^2 & \\ \quad -(X^4 - X^3 - X^2 + X) & \\ \hline \quad 0 + 2X^3 + 0 - X & \\ \quad\quad -(2X^3 - 2X^2 - 2X + 2) & \\ \hline \quad\quad 0 + 2X^2 + X - 2 & \end{array}$$

Donc, juste comme auparavant,

$$A^5 = 2A^2 + A - 2I_3.$$

Exo. 7 On calcule P_A :

$$P_A(X) = \det(X I_3 - A) = \det\begin{pmatrix} X-3 & -2 & -4 \\ 1 & X-3 & 1 \\ 2 & 1 & X+3 \end{pmatrix} =$$

$L_1 = 4L_2 + L_1$
$L_3 = -2L_2 + L_3$

$$= \det\begin{pmatrix} 4+(X-3) & 4(X-3)-2 & 4-4 \\ 1 & X-3 & 1 \\ -2+2 & -2(X-3)+1 & -2+(X+3) \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} X+1 & 4X-14 & 0 \\ 1 & X-3 & 1 \\ 0 & -2X+7 & X+1 \end{pmatrix} =$$

$$= (X+1)\det\begin{pmatrix} X-3 & 1 \\ -2X+7 & X+1 \end{pmatrix} - (4X-14)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & X+1 \end{pmatrix} =$$

$$= (X+1)\big((X-3)(X+1) - (-2X+7)\big) - (4X-14)(X+1)$$

$$= (X+1)\left[(X-3)(X+1) + 2X - 7 - (4X-14)\right]$$

$$= (X+1)\left(X^2 \cancel{-2X} - 3 + \cancel{2X} - 7 - 4X + 14\right)$$

$$= (X+1)(X^2 - 4X + 4) = (X+1)(X-2)^2.$$

Ainsi, A est trigonalisable (P_A scindé). On calcule $\dim\ker(2I_3 - A)$. On trouve :

$$2I_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Puisque les colonnes sont liés et puisqu'aucun mineur est nul, on trouve que $\text{rang}(2I_3 - A) = 2$ et, donc,

$$\dim \ker(2I_3 - A) = 1 < 2.$$

Par conséquent, A n'est pas diagonalisable.

On note que

$$(A + I_3)(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \neq 0_{M_3(\mathbb{R})}$$

et, donc, $(X+1)(X-2)$ n'est pas annulateur de A. Par conséquent,

$$\mu_A(X) = P_A(X) = (X+1)(X-2)^2.$$

Finalement, on cherche trigonaliser A. On voit que

$$(-I_3 - A)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$(2I_3 - A)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc $v_1 = (1, 0, -1) \in E(-1)$ et $v_2 = (2, 1, -1) \in E(2)$. On complète la base avec $v_3 = e_2 = (0, 2, 0)$. On calcule

- $Av_1 = -v_1 = (-1)v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3$
- $Av_2 = 2v_2 = 0\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + 0\cdot v_3$
- $Av_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 2\cdot v_3$

Ainsi, la réduction de A est

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

où

$$A = PTP^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exo. 8

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) On calcule P_A:

$$P_A(X) = \det(XI_3 - A) = \det\begin{pmatrix} X & -1 & 0 \\ 4 & X-4 & 0 \\ 2 & -1 & X-2 \end{pmatrix} =$$

$$= (X-2)\big(X(X-4) - (-1)\cdot 4\big) = (X-2)(X^2-4X+4)$$

$$\Longrightarrow P_A(X) = (X-2)^3.$$

Puisque P_A est scindé, on sait que A est trigonalisable

On sait que, pour que A soit diagonalisable, il fallait vérifier que

$$\dim\ker(2I_3 - A) = 3. \Leftrightarrow \text{rang}(2I_3 - A) = 0.$$

Mais cela est impossible car $2I_3 - A \neq 0_{M_3(\mathbb{R})}$ et donc $Im(2I_3 - A) \neq \{0\}$. Par conséquent, A n'est pas diagonalisable.

(2) On sait déjà que $2I_3 - A \neq 0_{M_3(\mathbb{R})}$. On calcule

$$(2I_3 - A)^2 = (2I_3 - A)(2I_3 - A)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_3(\mathbb{R})},$$

donc le polynôme minimal de A est

$$\mu_A(X) = (X-2)^2.$$

(3) En regardant $2I_3 - A$ on trove facilement deux vecteurs propres de A associés à la valeur propre 2, soit

$$v_1 = (0,0,1) \quad \text{et} \quad v_2 = (1,2,1)$$

On complète la base avec $v_3 = e_2 = (0,1,0)$. On calcule la forme triangulaire de A:

- $Av_1 = 2v_1 = 2\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3$
- $Av_2 = 2v_2 = 0\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + 0\cdot v_3$
- $Av_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2 + 2v_3 = 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 2\cdot v_3$

Ainsi, on trouve

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

telles que $A = PTP^{-1}$.

(4) On décompose

$$T = 2I_3 + N, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on voit que $N^2 = 0$. Évidamment $2I_3$ et N commutent (λI_n commute toujours). Ainsi,

$$T^n = (2I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} N^k =$$

$$= (2I_3)^n + n(2I_3)^{n-1} N + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} \underbrace{N^k}_{=0} =$$

$$= 2^n I_3 + n\cdot 2^{n-1} N = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

(5) Par une simple récurrence, on voit que

$$A = PTP^{-1} \Rightarrow A^n = PT^nP^{-1}.$$

On calcule P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{L_3 \uparrow L_1 \\ L_2 \downarrow}}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\overset{L_1' = L_1 - L_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{L_3' = L_3 - 2L_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Ainsi,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2^n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{n}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2^n \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{n}{2} \\ 0 & 2 & n+1 \\ 1 & 1 & \frac{n}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-n & \frac{n}{2} & 0 \\ 2-2(n+1) & n+1 & 0 \\ -n & \frac{n}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^n = 2^n \begin{pmatrix} 1-n & \frac{n}{2} & 0 \\ -2n & n+1 & 0 \\ -n & \frac{n}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

⚠ **Obs.:** Cet exercice demande de calculer T "si simple que possible", l'idée étant de Jordaniser A. Cela est utile car en général on peut écrire

$$J = D + N, \quad D \text{ diagonale}, \ N \text{ nilpotente},$$

où D et N commutent. La commutativité ici est utile pour faciliter le calcul du binôme de Newton

$$J^n = (D+N)^n.$$

Par contre, particulièrement dans cet exercice la Jordanisation est inutile car A admet une seule valeur propre, ce qui implique que D est multiple de I_3 et, donc, commute avec toute matrice.

Néanmoins, la Jordanisation dans cet exercice reste un bon problème d'entraînement de la méthode de réduction de Jordan que nous allons discuter dans le prochain exercice !

Exo. 9

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule P_A et on trouve

$$P_A(X) = (X-1)(X-2)^3.$$ (vérifiez!)

On commence par la valeur propre 1. On calcule

$$E(1) = \ker(A-I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On cherche les (x,y,z,w) tels que $(A-I)(x,y,z,w) = (0,0,0,0)$ Cela donne

$$\begin{cases} x+3y+z+2w=0 \\ 2x+y+z+w=0 \\ x-2y-z-w=0 \end{cases} \overset{\text{Calculez!}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} w = 5x \\ y = 3x \\ z = -10x \end{cases} \quad (\dim E(\lambda) = 1).$$

Si l'on prend $x=1$, alors on trouve $V_1 = (1,3,-10,5) \in E(1)$.

Maintenant, on s'occupe de la valeur propre 2. On calcule

$$E(2) = \ker(A-2I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On cherche les (x,y,z,w) tels que $(A-2I)(x,y,z,w) = (0,0,0,0)$.
Cela donne

$$\begin{cases} -x = 0 \\ x + 2y + z + 2w = 0 \\ 2x + y \quad + w = 0 \\ x - 2y - z - 2w = 0 \end{cases} \overset{\text{Calculez!}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x = z = 0 \\ w = -y \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(2) = \{(0,y,0,-y) \in \mathbb{R}^4 : y \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim E(2) = 1.$$

On calcule

$$\ker(A-2I)^2 = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On cherche les (x,y,z,w) tels que $(A-2I)^2(x,y,z,w) = (0,0,0,0)$.
Cela donne

$$\begin{cases} x = 0 \\ 5x + y + w = 0 \\ -7x - y - w = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ w = -y \end{cases} \Rightarrow \ker(A-2I)^2 = \{(0,y,z,-y) : z,y \in \mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow \dim \ker(A-2I)^2 = 2.$$

Finalement, on calcule

$$\ker(A-2I)^3 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ker(A-2I)^3 = \{x=0\} \Rightarrow \dim \ker(A-2I)^3 = 3.$$

On remarque que

$$E(2) = \ker(A-2I) \overset{+1\,\mathrm{dim}}{\subsetneq} \ker(A-2I)^2 \overset{+1\,\mathrm{dim}}{\subsetneq} \ker(A-2I)^3.$$

On cherche compléter les somes directes suivantes

$$\begin{array}{rcllll}
\ker(A-2I)^3 & = & \ker(A-2I)^2 \oplus & \langle u \rangle \oplus & \cdots & (1) \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle A-2I} & \downarrow{\scriptstyle A-2I} & \\
\ker(A-2I)^2 & = & \ker(A-2I) \oplus & \langle v \rangle \oplus & \cdots & (2) \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle A-2I} & \downarrow{\scriptstyle A-2I} & (3) \\
 & & & \langle w \rangle \oplus & \cdots & \\
\ker(A-2I) & = & & & &
\end{array}$$

On prend $u=(0,1,0,0)$ et on voit que $u \in \ker(A-2I)^3$ et $u \notin \ker(A-2I)^2$, donc la somme

$$\ker(A-2I)^3 \supset \ker(A-2I)^2 \oplus \langle u \rangle$$

est directe. Puisque $\dim(A-2I)^3 = 3$ et $\dim\ker(A-2I)^2=2$ on trouve que (1) est complète avec $\langle u \rangle$. On définit

$$v = (A-2I)u = (0,2,1,-2).$$

Donc $v \in \ker(A-2I)^2$ et $v \notin \ker(A-2I)$. En plus, $\dim\ker(A-2I) = 2$ et $\dim\ker(A-2I)=1$, donc la somme (2) est complète (et directe) avec $\langle v \rangle$. Finalement, on définit

$$w = (A-2I)v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (0,1,0,-1).$$

Pour la même raison, la somme (3) est directe et complète avec $\langle w \rangle$.

La base $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ avec

$\uparrow$ u, v, w

$V_2 = w$, $V_3 = v$ et $V_4 = u$,

est donc une base de Jordanisation de A. Dans cette base, A prend la forme

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (\star)$$

La matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -10 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

satisfait

$$A = PJP^{-1}.$$

⚠ Obs.: Dans cet exercice, on n'a pas été demandé de calculer la base de Jordanisation ou la matrice de passage. Donc il suffit d'observer que $P_A(X) = (X-1)(X-2)^3$ et $\dim \ker (A - 2I) = 1$ impliquent la seule possibilité $(\star)$. En effet :

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

↳ cette colonne correspond à un vecteur de $E(2) = \ker(A - 2I)$ et $\dim E(2) = 1$.

Exo. 10

(1) $\dim E = 4$, $\mu_u(X) = (X^2-1)(X-3)^2$.

Alors

$$\mu_u(X) = \underbrace{(X-1)}_{\text{blocs de taille 1}}\underbrace{(X+1)}_{}(X-3)^2.$$

bloc de taille 2 car $\dim E = 4 = 1+1+2$.

La seule possibilité :

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) $\dim E = 4$, $\mu_u(X) = X^2$. ← Un bloc de taille 2 et 1 ou 2 autres blocs pour compléter

$$J = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}}_{\text{partie (4) } \dim\ker u = 3} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{partie (3) } \dim\ker u = 2}$$

(5) $\dim E = 4$, $\mu_u = X^3$. ← Un bloc de taille 3 et forcément un bloc de taille 1 pour compléter.

Ainsi, la seule possibilité est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\dim\ker u = 2}$$

(6) $\dim E = 5$, $\mu_u(X) = X^2(X-1)^2$.

Alors,

$$X^2 (X-1)^2 \longrightarrow + \text{ Un bloc de taille } 1 \text{ pour } \lambda = 0 \text{ ou } 1 \text{ (en dépendant de } P_u\text{)}.$$

X^2 : Un bloc de taille 2

$(X-1)^2$: Un bloc de taille 2

Si $P_u(X) = X^3(X-1)^2$, alors

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \dim \ker(u - id_E) = 1$$

Correspond à la partie (7).

Si $P_u(X) = X^2(X-1)^3$, alors

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \dim \ker(u - id_E) = 2.$$

(8) $\dim E = 5$, $\mu_u(X) = X(X-1)^3$.

Alors

$$\underbrace{X}_{\text{au moins un bloc de taille 1}} \cdot \underbrace{(X-1)^3}_{\text{Un bloc de taille 3}} \longrightarrow$$

+ Un bloc de taille 1 pour compléter. (en dépendant de P_u)

Si $P_u(X) = X^2(X-1)^3$, alors

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}.$$

Si $P_u(X) = X(X-1)^4$, alors

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}.$$