Feuille TD 2

Exercice 11. On veut étudier la fonction

$$f :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

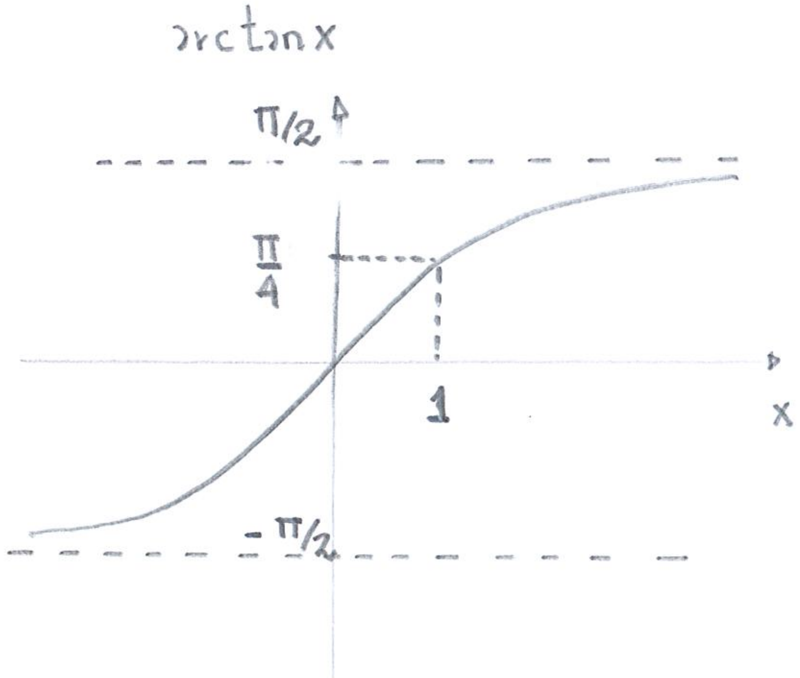
$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

(a) Notons que

$$f(1) = \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right)$$

$$= 2\arctan(1) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(1) = \frac{\pi}{2}}$$



(b) Dérivée de f ? On a

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\arctan(x)\right] + \frac{d}{dx}\left[\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Bref,

$$f'(x) = 0 \qquad \forall x \in \,]0,\infty[$$

Donc f est constante sur l'intervalle $]0,\infty[$

En particulier,

$$f(x) = f(1) \qquad \forall x \in]0, \infty[$$

On obtient ainsi la formule trigonométrique

$$\boxed{\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}} \qquad \forall x \in]0, \infty[$$

(c) Que se passe t-il sur l'intervalle $]-\infty, 0[$?

Réponse : la même demarche montre que

$$f(x) = f(-1) \qquad \forall x \in]-\infty, 0[$$

Autrement dit,

$$\boxed{\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}} \qquad \forall x \in]-\infty, 0[$$

Exercice 12

Etudions les variations de la fonction

$$x \longmapsto f(x) = x^5 - 5x + 1$$

On a

$$f'(x) = 5x^4 - 5$$

Donc

$$f'(x) = 0 \iff 5x^4 - 5 = 0 \iff x^4 = 1$$

$$\iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

Notons que

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, -1[\\ f'(x) < 0 & \text{si} \quad x \in]-1, 1[\\ f'(x) > 0 & \text{si} \quad x \in]1, \infty[\end{cases}$$

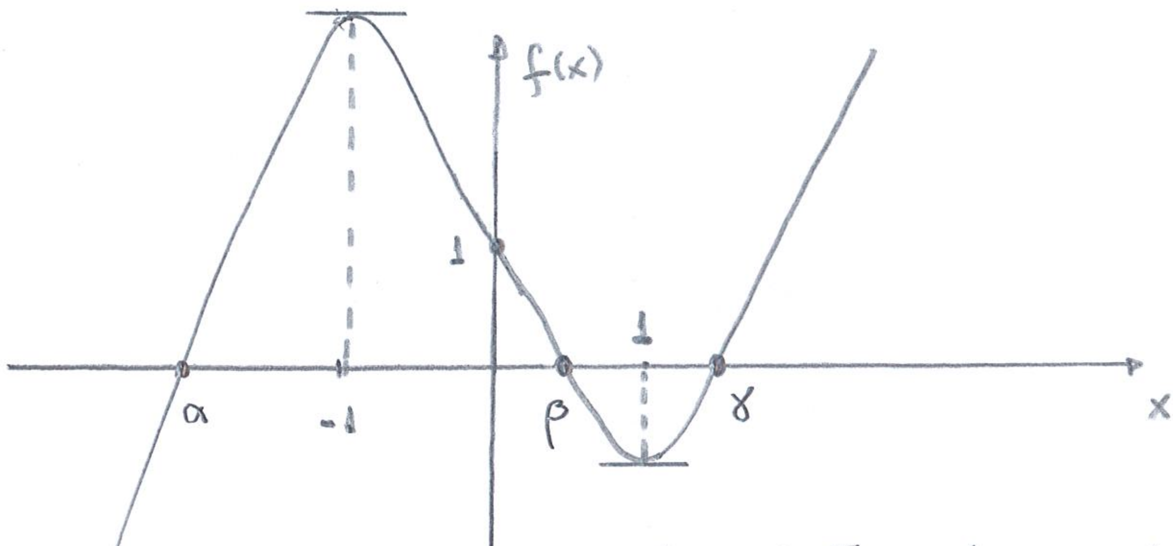
Donc

$$\begin{cases} f \text{ strictement croissant sur }]-\infty, -1[\\ f \text{ strictement decroissant sur }]-1, 1[\\ f \text{ strictement croissant sur }]1, \infty[\end{cases}$$

Notons aussi que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

Remarque : Le graphe de f est comme suit:



Seulement 3 racines : α, β et γ.

Exercice 13

Il s'agit de simplifier quelques expressions.

(a) $$e^{4a+1}\,(e^{-a})^4 = e^{4a+1}\,e^{-4a} = e^{1} = e$$

(b) $$\frac{(e^{-a})^2\,e^{3a+2}}{e^{a+3}} = e^{-2a}\,e^{3a+2}\,e^{-(a+3)}$$

$$= e^{-2a+3a+2-a-3} = e^{-1}$$

$$= \frac{1}{e}$$

(c) $$e^{-3\ln 4} = e^{\ln(4^{-3})} = 4^{-3}$$

$$= \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

(d) $\ln(25a) - 2\ln 5 = \ln(25a) - \ln(5^2)$

$$= \ln\left(\frac{25a}{5^2}\right) = \ln a$$

(e) $\ln(\sqrt{x}\,x^3) = \ln(x^{\frac{1}{2}}x^3) = \ln(x^{7/2})$

$$= \frac{7}{2}\ln x$$

(f) $\ln(a^3 - a) - \ln(a-1) = \ln\left(\frac{a^3-a}{a-1}\right)$

$$= \ln\left(\frac{a(a-1)(a+1)}{a-1}\right) = \ln(a(a+1))$$

$$= \ln(a^2 + a)$$

Exercice 14

Il s'agit de résoudre quelques équations et inéquations.

(a) $$e^{2x+3} \geqslant 7 \iff 2x+3 \geqslant \ln 7$$

$$\iff x \geqslant \frac{(\ln 7) - 3}{2}$$

$$\iff x \in \left[\frac{(\ln 7) - 3}{2}, \infty \right[$$

(b) $$20 \cdot 10^x = 35 \iff 10^x = \frac{7}{4}$$

$$\iff x \ln(10) = \ln\left(\frac{7}{4}\right)$$

$$\iff x = \frac{\ln\left(\frac{7}{4}\right)}{\ln(10)}$$

(c) $2^x = 3^{x-1} \iff 2^x = \frac{3^x}{3}$

$$\iff \frac{3^x}{2^x} = 3$$

$$\iff \left(\frac{3}{2}\right)^x = 3$$

$$\iff x \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 3$$

$$\iff x = \frac{\ln 3}{\ln(3/2)}$$

(d) $$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2$$

Posons $u = e^x$. Dans ce cas

$$\frac{u + \frac{1}{u}}{2} = 2$$

c.à.d, $u^2 - 4u + 1 = 0$ $u_1 = 2 - \sqrt{3}$, $u_2 = 2 + \sqrt{3}$

Donc

$$e^x = 2-\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad e^x = 2+\sqrt{3}$$

Finalement,

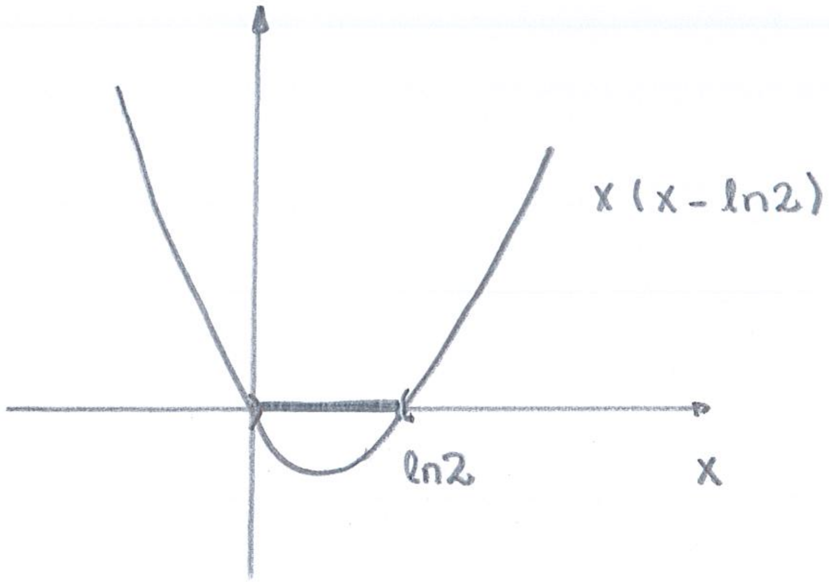
$$x = \underbrace{\ln(2-\sqrt{3})}_{\approx -1.317} \quad \text{ou} \quad x = \underbrace{\ln(2+\sqrt{3})}_{\approx 1.317}$$

(e) $\ln(2x+1) < -2 \iff 2x+1 < e^{-2}$

$$\iff x < \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^2 - 1}{2}$$

(f) $2^x > e^{x^2} \iff x \ln 2 > x^2$

$$\iff x^2 - x\ln 2 < 0 \iff x(x-\ln 2) < 0$$



Donc

$$x \in \,]0, \ln 2[$$

(g) $\ln(x^2-1) = \ln(2-x) + \ln(3-x)$

$\iff \ln(x^2-1) = \ln\left[(2-x)(3-x)\right]$

$\iff x^2 - 1 = (2-x)(3-x)$

$\iff x^2 - 1 = x^2 - 5x + 6$

$\iff -1 = -5x + 6$

$\iff x = \dfrac{7}{5}$

Exercice 15

$$7^n > 10^{2019}$$

$$\Leftrightarrow \quad n \ln 7 > 2019 \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow \quad n > \underbrace{\frac{2019 \ln(10)}{\ln 7}}_{\approx 2389.07}$$

On veut que n soit entier et le plus petit possible. Donc

$$\boxed{n = 2390}$$

Exercice 16

Il s'agit de calculer quelques dérivées

(a) $f(x) = \ln(x+4)$

$$f'(x) = \frac{1}{x+4}$$

valable si $x > -4$

(b) $$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right) x - (\ln x)\, 1}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

valable si $x > 0$

(c)

$$f(x) = \ln(\ln x)$$

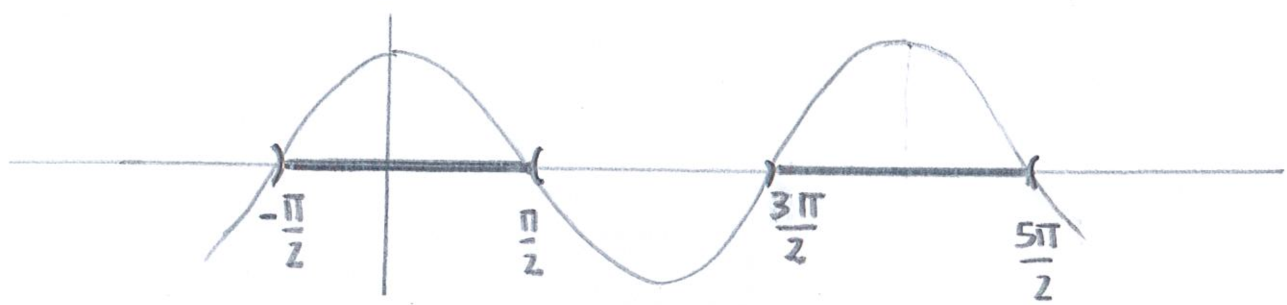
$$f'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

valable si $x > 1$

(d) $$f(x) = \ln(\cos x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\tan x$$

valable si $\cos x > 0$



(e) $$f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

valable pour $x > 0$

(f) $$f(x) = e^{\sin x}$$

$$\ln[f(x)] = \sin x$$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \cos x$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = e^{\sin x} \cos x$$

valable pour tout $x \in \mathbb{R}$

(g) $f(x) = (\sqrt{2})^{x}$

$\longrightarrow \quad \ln[f(x)] = x \ln\sqrt{2}$

$\longrightarrow \quad \dfrac{1}{f(x)} f'(x) = \ln\sqrt{2}$

$\longrightarrow \quad f'(x) = (\ln\sqrt{2})(\sqrt{2})^{x}$

valable pour tout $x \in \mathbb{R}$

(h) $f(x) = (x^4 + 2)^{\sqrt{3}}$

$f'(x) = \sqrt{3}\,(x^4+2)^{\sqrt{3}-1}\,(4x^3)$

$= 4\sqrt{3}\,x^3\,(x^4+2)^{\sqrt{3}-1}$

valable pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exercice 17

Application de la règle de l'Hôpital

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}}$$

(a) <u>question importante :</u> quand est-ce que cette règle est valable ? Répondre avec précision.

(b)

- $$\lim_{x \to 0} \frac{x + x^3}{\sin(3x)} = \left.\frac{1 + 3x^2}{3\cos(3x)}\right|_{x=0} = \frac{1}{3}$$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{\ln(1+x)} = \left.\frac{-e^{-x}}{\frac{1}{1+x}}\right|_{x=0} = -\frac{1}{1} = -1$$

- $$\lim_{x \to 1} \frac{\cos(\pi x/2)}{\sqrt{x} - 1} = \left.\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right|_{x=1} = \frac{-\frac{\pi}{2}\cdot 1}{\frac{1}{2}} = -\pi$$