Chap. 2 Dérivation.

L1S1 Portails Math-Info & Math-Physique
Analyse 1

2021-22

Exemple introductif : vitesse moyenne, vitesse instantanée. Considérons la situation suivante : un véhicule se déplace sur une route rectiligne, représentée par une droite du plan munie d'un repère (O, I), la distance entre O et I représentant 1km. On note $M(t)$ le point de la droite qui représente la position du véhicule au temps t (exprimé en heures), et $y(t)$ son abscisse : on peut supposer que le véhicule roule toujours dans le même sens, et que $y(t)$ croît avec t.
Notons $v_{moy}(t_1, t_2)$ la vitesse moyenne du véhicule entre les temps t_1 et t_2 (avec $t_1 < t_2$). La distance parcourue par le véhicule entre les temps t_1 et t_2 est $y(t_2) - y(t_1)$, donc sa vitesse moyenne (exprimée en km/h) entre ces deux temps est :

$$v_{moy}(t_1, t_2) = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

La vitesse instantanée au temps t_0, qu'on note $v_{inst}(t_0)$, est approximativement la vitesse moyenne entre t_0 et $t_0 + h$ pour une durée h très petite. Plus précisément, lorsque h tend vers 0, $v_{moy}(t_0, t_0 + h)$ tend vers $v_{inst}(t_0)$:

$$v_{inst}(t_0) = \lim_{h \to 0} v_{moy}(t_0, t_0 + h) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h}$$

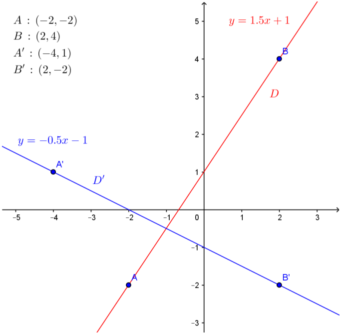
En termes mathématiques, $v_{inst}(t_0)$ est le nombre dérivé de la fonction $t \mapsto y(t)$ en t_0.

1.1 Pente (ou coefficient directeur) d'une droite (rappel)

On se place dans le plan muni d'un repère (O, OI, OJ). On considère une droite D non verticale (c'est-à-dire non parallèle à l'axe des ordonnées). Etant donnés deux points distincts $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ de D, le quotient $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ ne dépend pas du choix de A et B et est appelé coefficient directeur, ou pente de la droite D.

Une droite d'équation $y = ax + b$ est de pente a.

Etant donné un point $C(x_C, y_C)$, il existe une unique droite de pente a passant par C. Cette droite a pour équation $y = a(x - x_C) + y_C$.

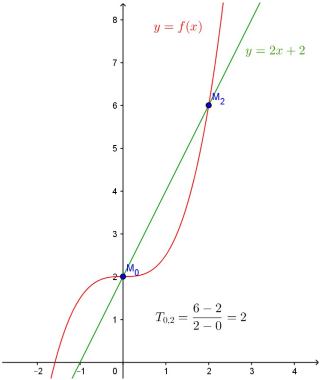


1.2 Taux d'accroissement

On considère une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Etant donnés a, b distincts appartenant à I, le taux d'accroissement de f entre a et b est donné par la formule

$$T_f(a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad \text{avec} \quad \Delta x = b-a\,,\ \Delta f = f(b)-f(a)$$

Interprétation graphique. Notons C_f la courbe qui représente f dans un repère (O, OI, OJ) et notons M_a et M_b les points de C_f d'abscisses respectives a et b. Alors $T_f(a,b)$ est la pente de la droite passant par les points M_a et M_b.



Remarques

- $T_f(a,b) = T_f(b,a)$.
- f est croissante (resp. strictement croissante) sur I si et seulement si, pour tous $a, b \in I$ avec $a \neq b$, $T_f(a,b) \geq 0$ (resp. $T_f(a,b) > 0$).

  De même f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si, pour tous $a, b \in I$ avec $a \neq b$, $T_f(a,b) \leq 0$ (resp. $T_f(a,b) < 0$).

1.3 Nombre dérivé en un point

On considère une fonction f définie sur D, réunion d'intervalles de longueurs non nulles, et on fixe un point t_0 de D.

Pour $x \in D, x \neq t_0$, on peut définir le taux d'accroissement $T_f(t_0, x)$ de f entre t_0 et x. On s'intéresse à ce qui se passe lorsque x devient très proche de t_0 : si le taux d'accroissement $T_f(t_0, x)$ admet une limite $L \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers t_0, on dit que la fonction f est dérivable en t_0; L est appelé nombre dérivé de f au point t_0, et est noté $f'(t_0)$, ou $\dfrac{df}{dx}(t_0)$.

La notation $\dfrac{df}{dx}(t_0)$ pour $f'(t_0)$ traduit le fait que $f'(t_0)$ peut être considéré comme le taux d'accroissement de f associé à une variation "infiniment petite" de x à partir de t_0.
En posant $x = t_0 + h$, faire tendre x vers t_0 revient à faire tendre h vers 0; $f'(t_0)$ est donc égal à la limite (si elle existe et est finie) de $T_f(t_0, t_0 + h)$ lorsque h tend vers 0. On a

$$T_f(t_0, t_0 + h) = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{(t_0 + h) - t_0} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h},$$

et donc

$$f'(t_0) = \lim_{x \to t_0} \frac{f(x) - f(t_0)}{x - t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

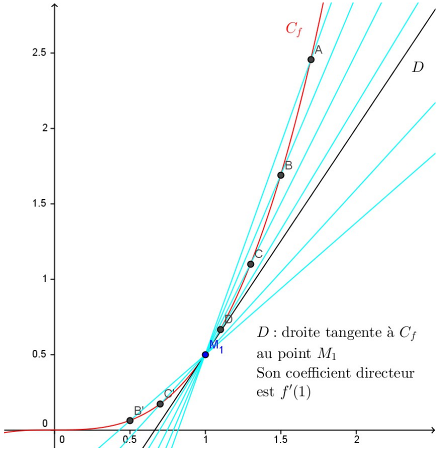
Remarque. On a $f(t_0 + h) = f(t_0) + hT_f(t_0, t_0 + h)$. Si f est dérivable en t_0, $\lim_{h\to 0} T_f(t_0, t_0 + h) = L \in \mathbb{R}$ et donc $\lim_{h\to 0} hT_{f,t_0}(h) = 0$,
$\lim_{h\to 0} f(t_0 + h) = f(t_0)$: si f est dérivable en t_0, alors f est continue en t_0.

Interprétation graphique.

On note C_f la courbe qui représente f dans un repère (O, OI, OJ). On note M le point de C_f d'abscisse t_0 et N_h le point de C_f d'abscisse $t_0 + h$. Lorsque h devient très petit, c'est-à-dire lorsque le point N_h se rapproche de M, la droite (MN_h) "tend" vers une droite D. Cette droite D est appelée la tangente à la courbe C_f au point M. Il s'agit de l'unique droite passant par M et de pente $f'(t_0)$. D a pour équation

$$y = f'(t_0)(x - t_0) + f(t_0)$$

On peut considérer le nombre $f'(t_0)$ comme la pente de la courbe C_f au point M.



1.4 Premiers exemples

a. Fonctions affines . On considère une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$. Tous les taux d'accroissement de f sont égaux à a; f est donc dérivable en tout $t_0 \in \mathbb{R}$, et $f'(t_0) = a$.

b. Fonction carré . Considérons la fonction $g : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, le taux d'accroissement de g entre t_0 et $t_0 + h$ est

$$T_g(t_0, t_0 + h) = \frac{(t_0 + h)^2 - t_0^2}{h} = \frac{t_0^2 + 2t_0 h + h^2 - t_0^2}{h} = \frac{2t_0 h + h^2}{h} .$$

On obtient donc $T_g(t_0, t_0 + h) = 2t_0 + h$. Lorsque h tend vers 0, $T_g(t_0, t_0 + h)$ tend vers $2t_0$. La fonction carré g est donc dérivable en tout point $t_0 \in \mathbb{R}$, et $g'(t_0) = 2t_0$.

Exercice. Vérifier que la fonction cube $k : x \mapsto x^3$ est dérivable en tout $t_0 \in \mathbb{R}$, avec $k'(t_0) = 3t_0^2$.

c. Fonction inverse . On considère la fonction $u : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Pour $t_0 \in \mathbb{R}^*$ et $h \neq 0$ assez proche de 0, $t_0 + h \in \mathbb{R}^*$, et

$$T_u(t_0, t_0+h) = \frac{1}{h}\Big(\frac{1}{t_0+h} - \frac{1}{t_0}\Big) = \frac{1}{h} \times \frac{t_0 - (t_0+h)}{t_0(t_0+h)} = -\frac{1}{t_0(t_0+h)}$$

On trouve ainsi $\lim_{h\to 0} T_u(t_0, t_0+h) = -\dfrac{1}{t_0^2}$: u est dérivable et tout point $t_0 \in \mathbb{R}^*$ et $u'(t_0) = -1/t_0^2$.

d. Fonction racine carré. On considère la fonction $v : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0, +\infty[$.

1er cas : $t_0 = 0$. $T_v(0, h)$ n'est défini que si $h > 0$, et

$$T_v(0,h) = \frac{v(h) - v(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{(\sqrt{h})^2} = \frac{1}{\sqrt{h}}\,.$$

Lorsque h tend vers 0, $\sqrt{h}$ tend vers 0 (en restant positif), et donc $\lim_{h\to 0} T_v(0,h) = +\infty$. La fonction v n'est donc pas dérivable en 0.

2-ième cas : $t_0 > 0$. On trouve

$$T_v(t_0, t_0+h) = \frac{\sqrt{t_0+h}-\sqrt{t_0}}{h} = \frac{(\sqrt{t_0+h}-\sqrt{t_0})(\sqrt{t_0+h}+\sqrt{t_0})}{h(\sqrt{t_0+h}+\sqrt{t_0})},$$

et $(\sqrt{t_0+h}-\sqrt{t_0})(\sqrt{t_0+h}+\sqrt{t_0}) = (\sqrt{t_0+h})^2 - (\sqrt{t_0})^2 = (t_0+h) - t_0 = h$, ce qui donne $T_v(t_0, t_0+h) = \dfrac{1}{\sqrt{t_0+h}+\sqrt{t_0}}$.

Ainsi $\lim_{h\to 0} T_v(t_0, t_0+h) = \dfrac{1}{2\sqrt{t_0}}$. La fonction v est donc dérivable en tout $t_0 \in]0, +\infty[$, et $v'(t_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{t_0}}$.

1.5 Fonction dérivée

Soit f une fonction de domaine de définition D, où D est une réunion d'intervalles de longueurs non nulles. Le domaine de dérivabilité D' de f est l'ensemble des points $t \in D$ en lesquels f est dérivable.
La fonction dérivée $f' : D' \to \mathbb{R}$ associe à tout $t \in D'$ le nombre dérivé de f en t.

Exemples. Dans le tableau ci-dessous, D désigne le domaine de définition de la fonction et D' son domaine de dérivabilité.

Nom de la fonction	D	Expression	D'	Dérivée
Affine	$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
Carré	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
Inverse	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = 1/x$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -1/x^2$
Racine carrée	$[0, +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$

Exercice. On considère la fonction $w : x \mapsto |x|$, définie sur $\mathbb{R}$. Justifier que w est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, avec $w'(x) = 1$ si $x > 0$, et $w'(x) = -1$ si $x < 0$.
Vérifier que

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{w(h) - w(0)}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0_-} \frac{w(h) - w(0)}{h} = -1$$

Le taux d'accroissement $T_w(0, h)$ de w entre 0 et h n'admet donc pas de limite lorsque h tend vers 0 : la fonction valeur absolue w n'est pas dérivable en 0.

Sens de variation et signe de la dérivée. Supposons que f est une fonction croissante (resp. décroissante) sur un intervalle I. Alors tous les taux d'accroissement de f entre deux points de I sont positifs ou nuls (resp. négatifs ou nuls). On peut en déduire le résultat suivant.

Proposition Si la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est croissante (resp. décroissante) sur un intervalle $I \subset D$ et dérivable en tout point de I, alors $f'(t) \geq 0$ (resp. $f'(t) \leq 0$) pour tout $t \in I$.

1.6 Dérivées des fonctions cosinus et sinus

On admet ici (voir l'exercice 4, TD2, où ceci est montré par un argument géométrique) que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0\,, \tag{1}$$

ce qui se traduit par : les fonctions sinus et cosinus sont dérivables en 0, et $\sin'(0) = 1$, $\cos'(0) = 0$.

Etudions la dérivabilité de sinus et cosinus en un point $a \in \mathbb{R}$ quelconque. En utilisant les formules donnant le sinus et le cosinus d'une somme,

$$\begin{aligned} T_{\sin}(a, a+h) = \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} \quad &= \quad \frac{\sin a \cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h} \\ &= \quad \sin a \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \frac{\sin h}{h}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\cos}(a, a+h) = \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} \quad &= \quad \frac{\cos a \cos h - \sin a \sin h - \cos a}{h} \\ &= \quad \cos a \frac{\cos h - 1}{h} - \sin a \frac{\sin h}{h}\,. \end{aligned}$$

Donc, en utilisant (1),

$$\lim_{h \to 0} T_{\sin}(a, a+h) = \sin a \times 0 + \cos a \times 1 = \cos a$$

Ainsi la fonction sinus est dérivable en a, et $\sin'(a) = \cos a$.
Toujours en utilisant (1),

$$\lim_{h \to 0} T_{\cos}(a, a+h) = \cos a \times 0 - \sin a \times 1 = -\sin a$$

Ainsi la fonction cosinus est dérivable en a, et $\cos'(a) = -\sin a$.

Conclusion : les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\sin' = \cos \qquad , \qquad \cos' = -\sin \; .$$

2 Dérivation et opérations sur les fonctions

2.1 Dérivée d'une somme ou d'une combinaison linéaire de fonctions.

On a les formules $(f+g)' = f' + g'$, et, pour $c_1, c_2, \ldots, c_n$ constantes réelles, $(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n)' = c_1 f_1' + c_2 f_2' + \ldots + c_n f_n'$.

Plus précisément :

i) On suppose que la fonction f est dérivable en t. Alors, pour toute constante réelle c, la fonction cf est dérivable en t, et $(cf)'(t) = cf'(t)$.

Par exemple, $(-f)'(t) = -f'(t)$, $(\sqrt{2}f)'(t) = \sqrt{2}f'(t)$, ...

ii) On suppose que les fonctions f et g sont toutes deux dérivables en t. Alors la fonction $f+g$ est dérivable en t et $(f+g)'(t) = f'(t) + g'(t)$.

iii) On suppose que les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont toutes dérivables en t. Alors pour toutes constantes réelles $c_1, \ldots, c_n$, la fonction $c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n$ est dérivable en t et $(c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n)'(t) = c_1 f_1'(t) + \ldots + c_n f_n'(t)$.

Par exemple, $(3f_1 - 2f_2 + 0,5 f_3)'(t) = 3f_1'(t) - 2f_2'(t) + 0,5 f_3'(t)$.

Exemple. Considérons la fonction $f : x \mapsto 2\sin x - 5\sqrt{x} + x^2 + 3x + 2$, définie sur $[0, +\infty[$; f est dérivable sur $]0, +\infty[$, et $f'(x) = 2\cos x - \dfrac{5}{2\sqrt{x}} + 2x + 3$.

2.2 Dérivée d'un produit de fonctions.

a) On a la formule $(fg)' = f'g + fg'$.

Plus précisément :

On suppose que les fonctions f et g sont toutes deux dérivables en t. Alors la fonction fg est dérivable en t et

$$(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)\,. \tag{2}$$

Exemple. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}(\cos x - \sin x)$; $f = u \times v$, avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v = \cos - \sin$. D'après (2), f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\cos x - \sin x) + \sqrt{x}(-\sin x - \cos x)\,.$$

Idée de la preuve de (2). On a

$$\begin{aligned}
T_{fg}(t,t+h) &= \frac{f(t+h)g(t+h)-f(t)g(t)}{h}\\
&= \frac{f(t+h)g(t+h)-f(t)g(t+h)+f(t)g(t+h)-f(t)g(t)}{h}\\
&= \frac{f(t+h)-f(t)}{h}g(t+h)+f(t)\frac{g(t+h)-g(t)}{h}\\
&= T_f(t,t+h)g(t+h)+f(t)T_g(t,t+h)\,.
\end{aligned}$$

Lorsque h tend 0, $T_f(t,t+h)$ et $T_g(t,t+h)$ tendent respectivement vers $f'(t)$ et $g'(t)$ (car f et g sont dérivables en t), et $g(t+h)$ tend vers $g(t)$ (car g est continue en t).
Donc $\lim_{h\to 0} T_{fg}(t,t+h) = f'(t)g(t)+f(t)g'(t)$, ce qui prouve que fg est dérivable en t et donne (2).

En appliquant la formule (2) aux produits de trois fonctions $fgh = (fg)h$, on obtient $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$. Plus généralement, pour $n \geq 2$ quelconque :

On suppose que les fonctions $f_1, f_2, \ldots f_n$ sont toutes dérivables en t. Alors la fonction $f_1 f_2 \ldots f_n$ est dérivable en t et

$$\begin{aligned}(f_1 f_2 \ldots f_n)'(t) &= f_1'(t) f_2(t) \ldots f_n(t) + f_1(t) f_2'(t) \ldots f_n(t) \\ &+ \ldots + f_1(t) \ldots f_{n-1}(t) f_n'(t)\,.\end{aligned}$$

b) Dérivée de $x \mapsto f(x)^n$. En considérant le cas où toutes les fonction f_i sont égales dans la formule précédente, on trouve :

Soit un entier $n \geq 2$. Si la fonction f est dérivable en t, alors la fonction $u : x \mapsto f(x)^n$ est dérivable en t et

$$u'(t) = (f^n)'(t) = nf(t)^{n-1} f'(t)\,. \qquad (3)$$

Exemple. Considérons la fonction $u : x \mapsto (x^2+1)^5$, définie sur $\mathbb{R}$. On a $u = f^5$, avec $f(x) = x^2+1$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc il en est de même de u, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 5f(x)^4 f'(x) = 5(x^2+1)^4(2x) = 10(x^2+1)^4 x$.

c) Application : dérivation d'une fonction polynomiale. En appliquant la formule (3) à la fonction identité $f = id : x \mapsto x$, on trouve que la dérivée de la fonction $u : x \mapsto x^n$ est la fonction $u' : x \mapsto nx^{n-1}$. On en déduit :

Soit P une fonction polynomiale, définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. La fonction P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1 \,.$$

Exemple. Posons $P(x) = 3x^5 - \sqrt{2}x^4 + x^3 - (2/3)x^2 + x - 3$. On a $P'(x) = 15x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 3x^2 - (4/3)x + 1$.

2.3 Dérivation d'un quotient de fonctions

a) On a la formule suivante : $(1/f)' = -f'/f^2$. Plus précisément :

On suppose que la fonction f est dérivable en t et $f(t) \neq 0$. Alors la fonction $u : x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ est dérivable en t et

$$u'(t) = \left(\frac{1}{f}\right)'(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)^2}. \tag{4}$$

Exemples. i) On considère la fonction $u : x \mapsto \dfrac{4}{x^2+1}$. On a $u = 4/f$, avec $f(x) = x^2 + 1$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule en aucun point. Donc u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'après la formule (4),

$$u'(x) = 4 \times \left(-\frac{f'(x)}{f(x)^2}\right) = (-4) \times \frac{2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{8x}{(x^2+1)^2}.$$

ii) Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction $v : x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, définie sur $\mathbb{R}^*$: on a $v = 1/g$, où g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^n$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc v est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, et

$$v'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}\,.$$

Idée de la preuve de (4). $f(t) \neq 0$ par hypothèse, donc pour $h \neq 0$ assez proche 0, $f(t+h) \neq 0$ (par la continuité de f en t), et

$$\begin{aligned} T_u(t, t+h) = T_{\frac{1}{f}}(t, t+h) &= \frac{1}{h}\Big(\frac{1}{f(t+h)} - \frac{1}{f(t)}\Big) = -\frac{f(t+h) - f(t)}{hf(t+h)f(t)} \\ &= -\frac{T_f(t, t+h)}{f(t+h)f(t)}\,. \end{aligned}$$

Lorsque h tend vers 0, $T_f(t, t+h)$ tend vers $f'(t)$ et $f(t+h)$ tend vers $f(t)$, donc $T_u(t, t+h)$ tend vers $-f'(t)/f(t)^2$. On obtient ainsi (4).

b) Comme le quotient de fonctions f/g est le produit des fonctions f et $1/g$, (2) et (4) permettent d'obtenir la formule de dérivation de f/g : $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$. Plus précisément :

Si les fonctions f et g sont toutes deux dérivables en t et $g(t) \neq 0$, alors la fonction $u : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est dérivable en t, et

$$u'(t) = \left(\frac{f}{g}\right)'(t) = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g(t)^2} \tag{5}$$

Exemple. On considère la fonction rationnelle u définie sur $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $u(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-2}$. On a $u = f/g$ avec $f(x) = x^2+x+1$, $g(x) = x-2$. Les fonctions f et g sont toutes deux dérivables en tout point de D et g ne s'annule en aucun point de D, donc u est dérivable en tout point de D, et

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{(2x+1)(x-2) - (x^2+x+1)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

c) Dérivée de la fonction tan. En appliquant (5) à la fonction $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$, on trouve que tan est dérivable en tout point de $D := \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ et

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos x - \sin x \cos'(x)}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

On a aussi $\tan'(x) = 1 + (\tan x)^2$.

3 Dérivation d'une composée et d'une bijection réciproque

3.1 Dérivée d'une composée

Proposition. On considère deux fonctions $f : D \to E$ et $g : E \to \mathbb{R}$, où D et E sont des réunions d'intervalles de longueurs non nulles. Si f est dérivable en un point $t \in D$ et g est dérivable en $s = f(t)$, alors $g \circ f$ est dérivable en t et

$$(g \circ f)'(t) = g'(f(t))f'(t)\,.$$

Pour appliquer cette règle, une partie du travail consiste à identifier les deux fonctions f et g que l'on compose.

Premiers exemples. On va retrouver des règles de dérivation déjà connues en utilisant la proposition ci-dessus.

- Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction $h : D \to \mathbb{R}$ par $h(x) = [f(x)]^n$. On remarque que $h = g \circ f$, où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $g(x) = x^n$. On sait que g est dérivable, et $g'(x) = nx^{n-1}$. En appliquant la proposition, on trouve que h est dérivable, avec
$$\forall x \in D\,,\ h'(x) = g'(f(x))f'(x) = n[f(x)]^{n-1}f'(x)\,.$$

- Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose $E = \{x \in D \,|\, f(x) \neq 0\}$ et on définit $h : E \to \mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. On remarque que $h = g \circ f_{|E}$, où $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est définie par $g(x) = 1/x$; g est dérivable, et $g'(x) = -1/x^2$. En appliquant la proposition, on trouve que h est dérivable en tout point de E, et
$$\forall x \in E\,,\ h'(x) = g'(f(x))f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}\,.$$

Autres exemples.

- On considère une fonction $u : D \to \mathbb{R}_+$ dérivable en tout point de D et on définit la fonction v sur D par $v(x) = \sqrt{u(x)}$. On a $v = g \circ u$, où g est la fonction racine carrée; g est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $g'(x) = 1/(2\sqrt{x})$. On peut dire d'après la proposition que v est d'erivable en t si $u(t) > 0$, et

$$v'(t) = g'(u(t))u'(t) = \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} .$$

  Par exemple, la fonction $h : x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $h'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

- Considérons la fonction $h : x \mapsto \sin(x^2)$. On a $h = \sin \circ f$, où $f : x \mapsto x^2$ est la fonction carré. On obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \ h'(x) = \sin'(f(x))f'(x) = \cos(x^2)(2x) = 2x\cos(x^2)$$

- On considère la fonction $h : x \mapsto \tan\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ On a $h = \tan \circ f$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq f(x) \leq 1$ (pourquoi?) . En particulier, $f(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$, et $\tan(f(x))$ est bien défini. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - (2x)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\,.$$

La fonction tan est dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$, avec $\tan'(x) = 1 + (\tan x)^2$. Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$h'(x) = \tan'(f(x))f'(x) = \left(1 + \tan^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right)\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\,.$$

3.2 Dérivée d'une bijection réciproque

a) Proposition. Soit $f : I \to J$ une bijection continue et strictement monotone, où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

i) On suppose que f est dérivable en un certain $t \in I$ et que $f'(t) \neq 0$. Alors la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en $s = f(t)$, et

$$(f^{-1})'(s) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(s))}\,. \tag{6}$$

ii) Par conséquent, si f est dérivable sur I, alors f^{-1} est dérivable en tous les points $s \in J$ tels que $f'(f^{-1}(s)) \neq 0$.

Remarque. Voici un moyen de retrouver la formule (6). On a $\forall x \in J\,,\ (f \circ f^{-1})(x) = x$. Donc $\forall x \in J\,,\ (f \circ f^{-1})'(x) = 1$. Si on suppose f^{-1} dérivable en s et f dérivable en $t = f^{-1}(s)$, on peut appliquer la formule qui donne la dérivée d'une fonction composée, et on obtient

$$f'(f^{-1}(s))(f^{-1})'(s) = (f \circ f^{-1})'(s) = 1\,.$$

D'où $(f^{-1})'(s) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(s))}$.

b) Application 1 : dérivée de la fonction racine n-ième.

- Supposons d'abord que n est un entier impair supérieur ou égal à 3. Nous avons vu que la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: la bijection réciproque $f_n^{-1} = \sqrt[n]{\ }$ est la fonction racine n-ième. La fonction f_n est dérivable, et $f_n'(x) = nx^{n-1}$; la fonction f_n' ne s'annule donc qu'en 0. Si $x \neq 0$, $f_n^{-1}(x) \neq 0$, et donc $f_n'(f_n^{-1}(x)) \neq 0$. On en déduit que la fonction f_n^{-1} est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}^*$, et

$$(n \text{ impair}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \ (\sqrt[n]{\ })'(x) = (f_n^{-1})'(x) = \frac{1}{f_n'(f_n^{-1}(x))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

  Par exemple, $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ (\sqrt[3]{\ })'(x) = \dfrac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$.

- Supposons à présent que n est un entier pair supérieur ou égal à 2. Nous avons vu que la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ .De la même manière que dans le cas où n est impair, on trouve que $f_n^{-1} = \sqrt[n]{\ }$ est dérivable en tout $x \in]0, +\infty[$, et

$$(n \text{ pair}) \quad \forall x \in]0, +\infty[, \ (\sqrt[n]{\ })'(x) = (f_n^{-1})'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

Pour $n = 2$, on retrouve la formule qui donne la dérivée de la fonction racine carrée.

Dans les deux cas (n impair et n pair), on a l'expression suivante pour la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

$$(f_n^{-1})'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{n(\sqrt[n]{x})^n} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} .$$

c) Application 2 : dérivées des fonctions circulaires réciproques.

On a vu que la fonction sin est une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$ et est dérivable, avec $\sin'(x) = \cos x$: $\sin'(x) \neq 0$ si $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. La bijection réciproque arcsin : $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est donc dérivable en x si $\arcsin(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$, c'est-à-dire si $x \in]-1, 1[$. On a

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

De même, cos est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ et est dérivable, avec $\cos'(x) = -\sin x \neq 0$ si $x \in]0, \pi[$. On en déduit que la bijection réciproque $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ est dérivable en x si $x \in]-1, 1[$, et

$$\forall x \in]-1, 1[\,,\ \arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Exercice. Montrer les formules $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ et $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, qu'on a utilisées dans ce qui précède.

On a vu que tan est une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$ et est dérivable, avec $\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[\,,\ \tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + (\tan x)^2 \neq 0$. Comme $\tan'$ ne s'annule nulle part, la bijection réciproque $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + [\tan(\arctan(x))]^2} = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

4 Applications de la dérivation

4.1 Signe de la dérivée et sens de variation

a) On a vu que lorsqu'une fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I, ses taux d'accroissement sont positifs (resp. négatifs), ce qui implique que la dérivée de f est positive (resp. négative) en tout point de I.

b) Réciproquement, on a les propriétés suivantes :

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle. On suppose f dérivable.

i) Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur l'intervalle I.

ii) Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points), alors f est strictement croissante sur l'intervalle I.

iii) Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur l'intervalle I.

iv) Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points), alors f est strictement décroissante sur l'intervalle I.

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle. On suppose f dérivable.
Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur l'intervalle I.

Remarque importante. Dans les résultats précédents, le fait que I soit un intervalle est une hypothèse essentielle. Considérons par exemple la fonction $H : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, définie par : $H(x) = 0$ si $x \in]-\infty, 0[$ et $H(x) = 1$ si $x \in]0, +\infty[$.
Cette fonction est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $H'(x) = 0$.
Cependant H n'est pas constante ($H(1) \neq H(-1)$). Ce sont la restriction de H à l'intervalle $]-\infty, 0[$ et la restriction de H à l'intervalle $]0, +\infty[$ qui sont des fonctions constantes.

Corollaire. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Si $f' = g'$, alors il existe une constante réelle C telle que $\forall x \in I$, $g(x) = f(x) + C$.

4.2 Application à l'étude des variations d'une fonction

On peut étudier les variations d'une fonction en étudiant le signe de sa dérivée f' : f est croissante sur tout intervalle sur lequel f' ne prend que des valeurs positives, décroissante sur tout intervalle sur lequel f' ne prend que des valeurs négatives.

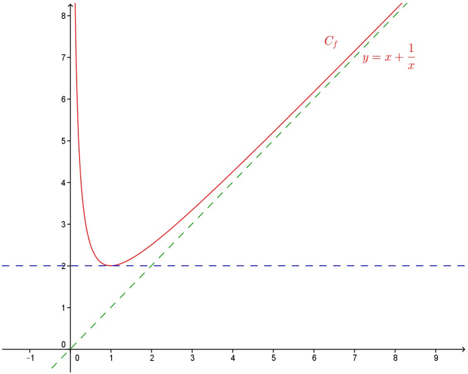
Supposons par exemple que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, que $f'(x) < 0$ si $x \in]-\infty, a[$, $f'(a) = 0$, $f'(x) > 0$ si $x \in]a, b[$, $f'(b) = 0$ et $f'(x) < 0$ si $x \in]b, +\infty[$. On obtient alors le tableau de variations suivant pour f :

x	-∞		a		b		+∞
f '(x)		-	0	+	0	-	
f(x)		↘	f(a)	↗	f(b)	↘	

Exemple. Considérons la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$. On a

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

On a $f'(1)=0$, $f'(x)<0$ si $x\in]0,1[$ et $f'(x)>0$ si $x\in]1,+\infty[$: la fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$.



4.3 Recherche d'extrema

Lorsqu'on veut résoudre un problème d'optimisation (voir par exemple certains exercices des TD2), on peut être amené à rechercher le maximum ou le minimum d'une fonction définie sur un intervalle. Nous allons voir que le calcul différentiel permet de restreindre l'ensemble des points où une fonction peut atteindre son maximum ou son minimum.

i) Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $t_0 \in I$. On dit que f atteint son maximum global en t_0 si toutes les valeurs prises par f sont inférieures ou égales à $f(t_0)$, c'est-à-dire : $\forall x \in I\,,\ f(x) \leq f(t_0)$; on dit alors que le maximum global de f vaut $f(t_0)$ et que t_0 est un maximiseur (global) de f.

ii) Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $t_0 \in I$. On dit que f atteint un maximum local en t_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant t_0 tel que $\forall x \in I \cap J\,,\ f(x) \leq f(t_0)$; ce maximum local vaut alors $f(t_0)$ et on dit que t_0 est un maximiseur local de f.

Remarques.

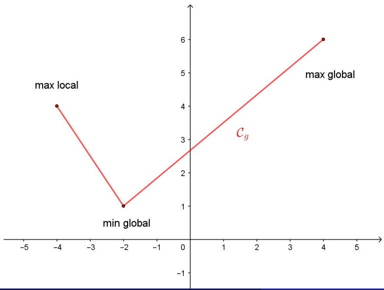
- Tout maximum global est aussi un maximum local.
- Une fonction peut fort bien ne pas avoir de maximiseur, même si elle est majorée

i) Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $t_0 \in D$. On dit que f atteint son minimum global en t_0 si toutes les valeurs prises par f sont supérieures ou égales à $f(t_0)$, c'est-à-dire : $\forall x \in I\,,\ f(x) \geq f(t_0)$; on dit alors que le minimum global de f vaut $f(t_0)$ et que t_0 est un minimiseur (global) de f.

ii) Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $t_0 \in D$. On dit que f atteint un minimum local en t_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant t_0 tel que $\forall x \in I \cap J\,,\ f(x) \geq f(t_0)$; ce minimum local vaut alors $f(t_0)$ et on dit que t_0 est un minimiseur local de f.

iii) Un extremum global (resp. local) de f est un maximum ou un minimum global (resp. local).

Exemple 1.



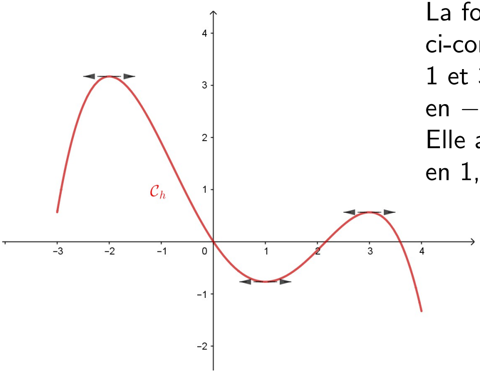
La fonction $g : [-4, 4] \to \mathbb{R}$ représentée ci-contre atteint son minimum global en -2, son maximum global en 4; g présente aussi un maximum local en -4: pour tout x dans $[-4, -3[= [-4, 4] \cap]-5, -3[$, $g(x) \leq g(-4)$.

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $t_0 \in I$ est un point critique de f si f est dérivable en t_0 et $f'(t_0) = 0$. Les points critiques d'une fonction sont donc les zéros de sa dérivée. Si t_0 est un point critique de f, la courbe représentative de f a une tangente horizontale au point de coordonnées $(t_0, f(t_0))$.

Proposition. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $t_0 \in I$, un point où f atteint un extremum (local ou global). On suppose de plus que t_0 n'est pas une extrémité de I et que f est dérivable en t_0. Alors t_0 est un point critique de f.

Remarque. Cette proposition ne s'applique pas à l'exemple 1 précédent : dans cet exemple, les extrema de f sont atteints aux extrémités de l'intervalle I de définition et en -2, où f n'est pas dérivable.

Exemple 2.



La fonction $h : [-3, 4] \to \mathbb{R}$ représentée ci-contre a comme points critiques -2, 1 et 3; h atteint son maximum global en -2 et son minimum global en 4. Elle atteint un minimum local en -3 et en 1, et un maximum local en 3.

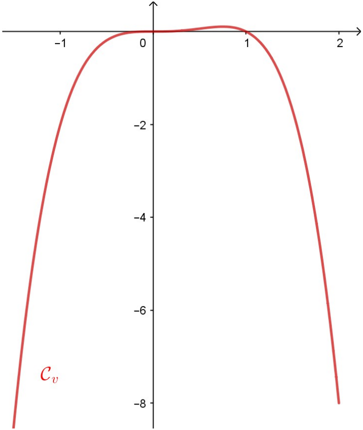
Pour chercher les extrema éventuels d'une fonction dérivable, on peut appliquer le principe suivant :

> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Les minimiseurs et maximiseurs éventuels de f sont à chercher parmi les points critiques de f et les extrémités de l'intervalle I.

Exemple 3. On considère la fonction $v :]-\infty, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $v(x) = x^3 - x^4$. Cherchons les extrema (locaux ou globaux) de v. La fonction v est dérivable, et $v'(x) = 3x^2 - 4x^3 = x^2(3-4x)$; v possède deux points critiques : 0 et 3/4. Les seuls minimiseurs ou maximiseurs possibles pour v sont donc 0, 3/4 et 2. De plus, $v'(x) > 0$ pour $x \in]-\infty, 0[$ et $x \in]0, 3/4[$, et $v'(x) < 0$ pour $x \in]3/4, 2]$. On obtient pour v le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$3/4$		2
$v'(x)$		$+$	0	$+$	0	-	
$v(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{27}{256}$	$\searrow$	-8

On voit sur le tableau de variations que v présente : un maximum global en $3/4$, qui vaut $27/256$ et un minimum local en 2, qui vaut -8.



Remarquons que v ne présente ni un minimum local, ni un maximum local en 0, bien que 0 soit un point critique. Cela est dû au fait que f' ne change pas de signe en 0.

On suppose que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et que a est à l'intérieur de I (c'est-à-dire: $a \in I$ et a n'est pas une extrémité de I). Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f atteint en a soit un maximum local, soit un minimum local. Plus précisément :

- Si f' est négative à gauche de a (c'est-à-dire sur un intervalle $]a-r, a[$ avec $r > 0$) et positive à droite de a (c'est-à-dire sur un intervalle $]a, a+r'[$ avec $r' > 0$), alors f atteint en a un minimum local.
- f' est positive à gauche de a et négative à droite de a, alors f atteint en a un maximum local.

4.4 Preuves d'inégalités

La dérivation permet de montrer certaines inégalité : par exemple on peut parfois justifier qu'une certaine fonction u ne prend que des valeurs positives sur un intervalle I par l'étude des variations de u sur I (et donc du signe de u').

Exemple. Montrons la propriété suivante : $\forall x \in [0,+\infty[\,,\ \arctan(x) \leq x$.

On définit la fonction $u : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $u(x) = x - \arctan(x)$. La fonction u est dérivable (comme différence de fonctions dérivables), et

$$\forall x \in [0,+\infty[\,,\ u'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$$

La fonction u est donc croissante sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On en déduit que $\forall x \in [0,+\infty[\,,\ u(x) \geq u(0)$. Or $u(0) = 0 - \arctan(0) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $u(x) \geq 0$, c'est-à-dire $\arctan(x) \leq x$.

Exercice. Montrer en utilisant la même méthode que $\forall x \in [0,+\infty[\,, \sin x \leq x$ et $\forall x \in [0,\pi/2[\,,\ \tan x \geq x$.

5 Logarithme, exponentielle

5.1 Fonction logarithme népérien

a) Il existe une unique fonction $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, appelée logarithme népérien telle que : $\begin{cases} \ln \text{ est dérivable et } \forall x \in]0,+\infty[\,,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x} \\ \ln(1) = 0 \end{cases}$.

Pour l'existence, on utilise un résultat du chapitre 3 : la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ étant continue sur $]0,+\infty[$, elle admet une primitive F sur $]0,+\infty[$. On pose alors $C = -F(1)$, et $\ln = F + C$. Pour montrer l'unicité on suppose que $f, g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ sont des fonctions qui s'annulent en 1 et dont la dérivée est la fonction inverse. On a alors $f' = g'$ donc, d'après un résultat de 4.1, il existe une constante réelle C telle que $\forall x \in]0,+\infty[\,,\ g(x) = f(x) + C$. En particulier, $g(1) = f(1) + C$, ce qui donne $C = 0$, puisque $f(1) = g(1) = 0$. Ainsi $g = f$.

b) Comportement de ln vis à vis du produit. Soit un réel $a > 0$ fixé. Considérons la fonction $u_a : x \mapsto \ln(ax)$, définie sur $]0,+\infty[$; $u_a = \ln \circ v$, où v est la fonction linéaire définie sur $]0,+\infty[$ par $v(x) = ax$ (v prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$).

u_a est dérivable et

$$\forall x \in]0,+\infty[\,,\ u_a'(x) = \ln'(v(x))v'(x) = \frac{a}{v(x)} = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}\,.$$

On a donc $u_a' = \ln'$, ce qui implique l'existence d'une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in]0,+\infty[\,,\ u_a(x) = \ln(x) + C\,.$$

En particulier, $u_a(1) = \ln(1) + C = C$, ce qui donne $C = \ln(a)$, et $\ln(ax) = \ln(x) + \ln(a)$. D'où le résultat suivant.

Proposition. La fonction ln transforme un produit en somme :

$$\forall a > 0\,,\ \forall b > 0\,,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)\,. \tag{7}$$

Pour $a_1 > 0, a_2 > 0 \ldots, a_k > 0$,

$$\ln(a_1 a_2 \ldots a_k) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \ldots + \ln(a_k)\,. \tag{8}$$

Les formules suivantes sont des conséquences de (7) et (8).

i) $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(1/b) = -\ln(b)$;

ii) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$;

iii) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(a^k) = k\ln(a)$;

iv) Pour tout entier $n \geq 2$, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(\sqrt[n]{a}) = \dfrac{\ln(a)}{n}$.

Exemples.

$$\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{16}\right) = \ln(\sqrt{3}) - \ln(16) = \frac{\ln(3)}{2} - \ln(2^4) = \frac{\ln 3}{2} - 4\ln 2 \,.$$

$$\frac{\ln(\sqrt{5}+1) + \ln(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{\ln((\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1))}{2} = \frac{\ln 4}{2} = \frac{\ln(2^2)}{2} = \ln 2 \,.$$

c) Sens de variation et limites de ln.

Proposition. i) La fonction $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est strictement croissante.
ii) Si $x \in]0,1[$, $\ln x < 0$ et si $x \in]1,+\infty[$, $\ln x > 0$.
iii) On a $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x\to 0, x>0} \ln x = -\infty$.
iv) De plus $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

i) est une conséquence de : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = 1/x > 0$. Comme ln est strictement croissante, on a $\ln x < \ln 1$ pour $x \in]0,1[$ et $\ln x > \ln 1$ pour $x > 1$, ce qui donne ii).
Pour montrer $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on se donne un réel $A > 0$ et on montre que pour x assez grand, $\ln x > A$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\ln(2^n) = n \ln 2$, avec $\ln 2 > 0$. Il existe donc un entier n_0 tel que $\ln(2^{n_0}) > A$, et comme ln est croissante, $\ln x > A$ pour tout $x \geq 2^{n_0}$.
On a $\ln x = -\ln(1/x)$. Lorsque x tend vers 0 (avec $x > 0$), $1/x$ tend vers $+\infty$, donc $\ln(1/x)$ tend vers $+\infty$. Cela donne : $\lim_{x\to 0, x>0} \ln x = -\infty$.

Pour prouver iv), on peut montrer d'abord l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x - 1 \leq x$, en étudiant le sens de variation sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto x - 1 - \ln x$. En utilisant $\ln x = \ln(\sqrt{x}^2) = 2\ln(\sqrt{x})$, on obtient ensuite

$$\forall x > 0\,,\ \ln x = 2\ln(\sqrt{x}) \leq 2\sqrt{x}\,.$$

En divisant les membres de cette inégalité par $x > 0$ et en utilisant que $\ln x \geq 0$ pour $x \geq 1$, on trouve

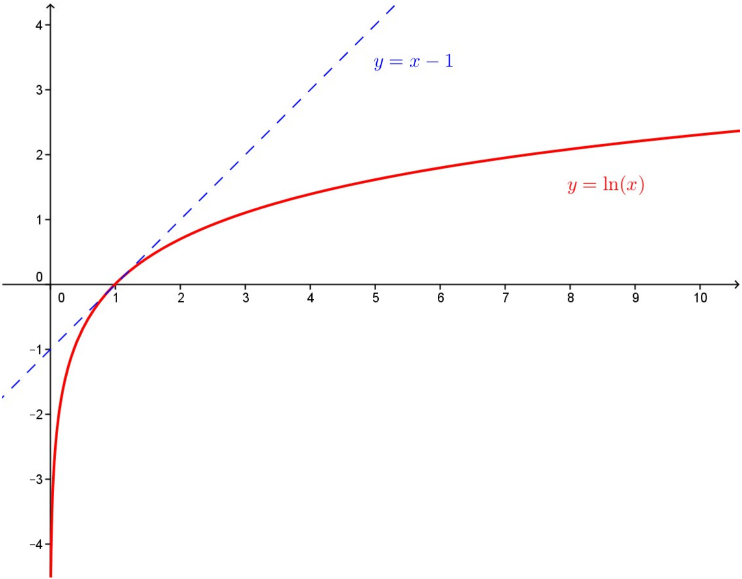
$$\forall x \geq 1\,,\ 0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}\,.$$

On en déduit iv) par le théorème des gendarmes.

Remarques.

- La propriété iv) est liée au fait que lorsque x croît vers $+\infty$, $\ln(x)$ croît très lentement vers $+\infty$. On a :
  $\ln 2 \simeq 0,693$; $\ln 3 \simeq 1,099$; $\ln 5 \simeq 1,609$; $\ln 10 \simeq 2,303$; $\ln(100) \simeq 4,605$; $\ln(1000) \simeq 6,908$; $\ln(10^9) \simeq 20,723$.
- On a
$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \ln'(1) = 1\,.$$

d) Courbe représentative de la fonction ln.



e) Dérivation de $x \mapsto \ln(u(x))$. On considère une fonction $u : D \to]0, +\infty[$. On peut alors définir la fonction $g : D \to \mathbb{R}$ par $g(x) = \ln(u(x))$; si la fonction u est dérivable en $t \in D$, alors g est dérivable en t et

$$g'(t) = (\ln \circ u)'(t) = \ln'(u(t))u'(t) = \frac{u'(t)}{u(t)}.$$

Exemples.

- On pose $I =]-\infty, 0[$ et $u(x) = -x$. La fonction $g : x \mapsto \ln(-x)$ est définie et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

- On pose $I = \mathbb{R}$ et $u(x) = x^2 + 1$. La fonction $g : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

5.2 La fonction exponentielle

a) La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, avec $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$. La fonction ln est donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. La bijection réciproque $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est appelée fonction exponentielle.

Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation (d'inconnue t) $\ln(t) = x$ a une unique solution dans $]0, +\infty[$. Cette solution est appelée exponentielle de x, et notée $\exp(x)$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0, +\infty[$, $\quad \exp(x) = t \iff \ln(t) = x$.

On a $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x \quad$ et $\quad \forall t \in]0, +\infty[,\ \exp(\ln(t)) = t$.

On note e l'unique solution dans $]0, +\infty[$ de l'équation $\ln(t) = 1$: e est appelé la base du logarithme népérien; e est compris strictement entre 2 et 3 (car $\ln(2) < 1$ et $\ln(3) > 1$). Plus précisément, $e \simeq 2,718282$.

On a $\ln(1) = 0$ donc $\exp(0) = 1$; $\ln(e) = 1$ donc $\exp(1) = e$;
$\ln(1/e) = -\ln(e) = -1$ donc $\exp(-1) = 1/e$.

b) Comportement de exp vis à vis de la somme. Les propriétés suivantes sont une conséquence des propriétés de la fonction ln.

i) D'après les propriétés de la fonction ln, on a, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(a)\exp(b)) = \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b)) = a + b$. On en déduit :

$$\forall a \in \mathbb{R}\,,\ \forall b \in \mathbb{R}\,,\ \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)\,. \tag{9}$$

ii) La formule (9) appliquée aux réels $a - b$ et b donne $\exp(a-b)\exp(b) = \exp(a)$, et donc

$$\forall a \in \mathbb{R}\,,\ \forall b \in \mathbb{R}\,,\ \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}\,. \tag{10}$$

En particulier $\forall b \in \mathbb{R}\,,\ \exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}$.

iii) En appliquant plusieurs fois la propriété (9), on obtient, pour tous réels $a_1, \ldots, a_n$,

$$\exp(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \exp(a_1)\exp(a_2)\ldots\exp(a_n)\,.$$

On peut en déduire

$$\forall n \in \mathbb{Z}\,,\ \forall a \in \mathbb{R}\,,\ \exp(na) = [\exp(a)]^n\,. \qquad (11)$$

Enfin, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\exp(\frac{a}{n}) = [\exp(a)]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\exp(a)}\,. \qquad (12)$$

En particulier, $\exp(a/2) = \sqrt{\exp(a)}$.

D'après (11), $\exp(n) = [\exp(1)]^n = e^n$ pour tout entier relatif n.

Par extension, pour tout nombre réel x, le nombre réel $\exp(x)$ est en général noté e^x. Avec cette notation, les propriétés précédentes s'écrivent : pour a, b nombres réels,

$$e^0 = 1 \qquad e^{a+b} = e^a e^b \qquad e^{-b} = \frac{1}{e^b} \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$e^{na} = (e^a)^n \quad (\,n \in \mathbb{Z}\,) \qquad e^{\frac{a}{n}} = [e^a]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e^a} \quad (\,n \in \mathbb{N}^*\,)\,.$$

c) Sens de variation, limites et courbe représentative de exp.

La fonction exp : $\mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est continue et strictement croissante. De plus $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Les propriétés ci-dessus sont dues au fait que la fonction exp est la bijection réciproque de ln $:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, qui est continue et strictement croissante (on peut appliquer la proposition du chapitre 1, 8.2).

A cause de la croissance stricte de exp, on a, pour tous réels x_1, x_2

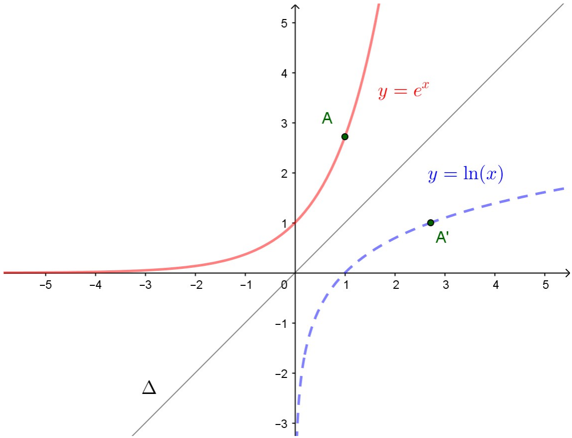
$$e^{x_1} < e^{x_2} \iff x_1 < x_2 \quad \text{et} \quad e^{x_1} \leq e^{x_2} \iff x_1 \leq x_2\,.$$

A la propriété $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ de la fonction ln, correspondent les propriétés suivantes de la fonction exp :

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0\,.$$

Plus généralement, pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

Ces limites traduisent le fait que e^x croît très rapidement lorsque x devient grand : $e^2 \simeq 7,39$; $e^3 \simeq 20,09$; $e^5 \simeq 148,41$; $e^{10} \simeq 22026,47$...



La courbe représentative de exp s'obtient à partir de celle de ln par symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$. Sur le dessin, A a pour coordonnées $(1, e)$ et A' a pour coordonnées $(e, 1)$.

d) Dérivée de la fonction exponentielle. La fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[\,,\ \ln'(x) = 1/x \neq 0$. D'après la proposition de 3.2, on en déduit que la fonction $\exp = \ln^{-1}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \exp'(x) = [\ln^{-1}]'(x) = \frac{1}{\ln'(\ln^{-1}(x))} = \frac{1}{\ln'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x\,.$$

Ainsi

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

Conséquence. Soit $u : D \to \mathbb{R}$. Si u est dérivable en $t \in D$, alors la fonction $\exp \circ u : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable en t et $(\exp \circ u)'(t) = u'(t)e^{u(t)}$.

Exemples. i) La fonction $f : x \mapsto e^{3x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3e^{3x}$. La fonction $g : x \mapsto e^{-2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -2e^{-2x}$.

ii) La fonction $h : x \mapsto e^{x^3-4x+2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = (3x^2-4)e^{x^3-4x+2}$.

iii) La fonction $w : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $w'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

5.3 La notation a^x, fonctions exponentielle et logarithme de base a

a) Pour tout $a > 0$ et tout entier relatif n, $\ln(a^n) = n\ln(a)$, et donc $a^n = e^{n\ln(a)}$. Par extension, $e^{x\ln(a)}$, qui est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, est noté a^x :

$$\text{Pour } a \in]0, +\infty[\text{ et } x \in \mathbb{R}, \ a^x \overset{def}{=} e^{x\ln(a)} .$$

Par définition de a^x, $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

On a en particulier $a^x > 0$, $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $1^x = 1$.

Exercice. Jusfifier que $(a^x)^y = a^{xy}$.

b) Soit $a > 0$. On appelle fonction exponentielle de base a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à x associe a^x.

La fonction exponentielle de base a prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$ et transforme, comme la fonction exp, une somme en produit et une différence en quotient :

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_1} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^{x_1-x_2} = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$$

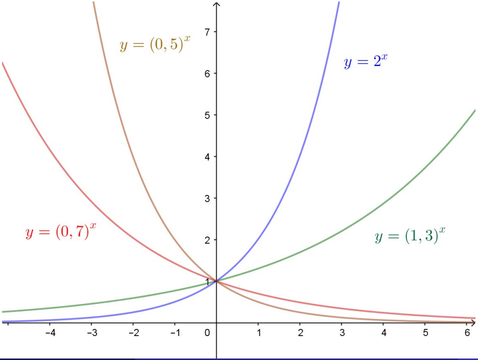
Notons que la fonction $f : x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \ln(a)e^{x\ln(a)} = \ln(a)a^x$.

Sens de variation de la fonction exponentielle de base a. Ce sens de variation dépend du signe de $\ln(a)$, et donc de la position de a par rapport à 1.

i) Si $a > 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante, avec $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

ii) Si $0 < a < 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante, avec $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$.

iii) Si $a = 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est constante, de valeur 1.



c) Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle fonction logarithme de base a et on note $\log_a$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ qui à x associe $\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

La fonction logarithme de base a transforme, comme la fonction ln, un produit en somme et un quotient en différence :

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) \qquad \log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a(x)$$

$$\log_a(\frac{x_1}{x_2}) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2)$$

Propriété. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\log_a(a^x) = x$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $a^{\log_a(x)} = x$.

Par exemple, $\log_{10}(1000) = \log_{10}(10^3) = 3$; $\log_{10}(0,01) = \log_{10}(10^{-2}) = -2$.

Sens de variation de la fonction logarithme de base a. Ce sens de variation dépend du signe de $\ln(a)$, et donc de la position de a par rapport à 1.

i) Si $a > 1$, la fonction $\log_a$ est strictement croissante, avec $\lim_{x\to 0} \log_a(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty$.

ii) Si $0 < a < 1$, la fonction $\log_a$ est strictement décroissante, avec $\lim_{x\to 0} \log_a(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty$.

6 Fonctions puissance

6.1 Fonctions puissance déjà définies

a) Exposant entier naturel. Par convention, $x^0 = 1$ pour tout réel x.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, x^n est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $x^n = \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{n \ fois}$.

La fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$ est dérivable, et $f_n'(x) = nx^{n-1}$ (avec le cas particulier $f_0'(x) = 0$).

b) Exposant entier négatif. Soit m un entier strictement négatif : $m = -n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on définit x^m par : $x^m = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

La fonction $f_m : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f_m(x) = x^m = x^{-n}$ est dérivable et $f_m'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1} = mx^{m-1}$.

c) Racine n-ième. Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$. Si n est impair, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ est défini pour tout réel x : c'est l'unique réel y tel que $y^n = x$. Si n est pair $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ est défini pour tout réel x positif ou nul : c'est l'unique réel y positif ou nul tel que $y^n = x$.

$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ est appelé racine n-ième de x, ou x puissance $1/n$.

i) Si n est impair, la fonction $f_{1/n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_{1/n} = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$

ii) Si n est pair, la fonction $f_{1/n} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f_{1/n} = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ est dérivable en tout point de $]0, +\infty[$

Dans les deux cas, $f'_{1/n}(x)$ est donné par la formule $f'_{1/n}(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{nx} = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

Dans les cas précédents (r entier ou $r = 1/n$ avec n entier supérieur ou égal à 2), la fonction $f_r : x \mapsto x^r$ a les propriétés suivantes :

i) Le domaine de définition de f_r et son domaine de dérivabilité contiennent $]0, +\infty[$;

ii) $f_r(xy) = (xy)^r = x^r y^r = f_r(x) f_r(y) \qquad f'_r(x) = r x^{r-1}$.

iii) Si $x > 0$, $x^r > 0$ et $\ln(x^r) = r\ln(x)$. Donc $x^r = e^{r\ln(x)}$.

6.2 Fonctions puissance générales

Soit α un réel. On appelle fonction puissance α la fonction d'ensemble de définition $]0,+\infty[$ qui à x associe $x^\alpha \overset{def}{=} e^{\alpha \ln(x)}$

Propriétés.

- $1^\alpha = 1$.
- Pour tout $x > 0$, $x^\alpha > 0$.
- Pour tous $x, y > 0$, $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ et $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$.

  Pour obtenir par exemple la première formule, on utilise les propriétés des fonctions ln et exp :
  $(xy)^\alpha = e^{\alpha \ln(xy)} = e^{\alpha(\ln(x)+\ln(y))} = e^{\alpha \ln(x)+\alpha \ln(y)} = e^{\alpha \ln(x)} e^{\alpha \ln(y)} = x^\alpha y^\alpha$.
- Pour tout $x > 0$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. En particulier, si $\alpha \neq 0$, $(x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = x$.
- Pour tout $x > 0$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ et $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$.

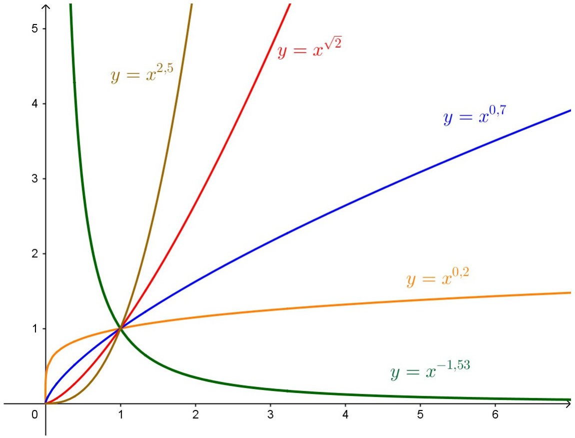
Dérivation. Soit α un réel. La fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable en tout point de $]0,+\infty[$ et $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Preuve. On a $f_\alpha = \exp \circ u_\alpha$ où la fonction u_α est définie sur $]0,+\infty[$ par $u_\alpha(x) = \alpha \ln(x)$. Par la formule qui donne la dérivée d'une composée, on obtient

$$f'_\alpha(x) = \exp'(u_\alpha(x))u'_\alpha(x) = \exp(u_\alpha(x)) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha\frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

- Si $\alpha = 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est constante de valeur 1.
- Si $\alpha < 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, et $\lim_{x\to0,x>0} x^\alpha = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$.
- Si $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, et $\lim_{x\to0,x>0} x^\alpha = 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$.

Remarque. Si $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ se prolonge en 0 “par continuité”, en posant $0^\alpha = 0$.



Comparaison entre x^α et x^β. Soient α et β deux réels, avec $\alpha < \beta$. Alors :

- Pour tout $x \in]0,1[$, $x^\alpha > x^\beta$.
- Pour tout $x \in]1,+\infty[$, $x^\alpha < x^\beta$.

7 Dérivées d'ordre supérieur, formule de Taylor-Young

7.1 Fonctions plusieurs fois dérivables

a) On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I. Soit $a \in I$. On dit que f est deux fois dérivable en a (ou que $f''(a)$ existe) si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a; le nombre dérivé de f' en a est alors appelée la dérivée seconde de f en a et est noté $f''(a)$:

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} .$$

On dit que f est deux fois dérivable sur I lorsque la fonction f' est dérivable sur I. On peut alors définir la fonction dérivée seconde $f'' : I \to \mathbb{R}$ comme la fonction dérivée de f' : $f'' = (f')'$.

Exemples. i) Soit $f : x \mapsto x^5$; on a $f'(x) = 5x^4$, $f''(x) = 20x^3$.

ii) Soit $g : x \mapsto \sqrt{x}$; g est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $g''(x) = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$.

b) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable (sur I) et $a \in I$. On dit que f est trois fois dérivable en a si la fonction f'' est dérivable en a. La dérivée troisième de f en a, notée $f^{(3)}(a)$ est alors le nombre dérivé de la fonction f'' en a : $f^{(3)}(a) = [f'']'(a)$.

Plus généralement, on définit la k-dérivabilité par récurrence : une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, $k-1$ fois dérivable sur I est dite k fois dérivable en a (resp. sur I) si la fonction $f^{(k-1)}$ est dérivable en a (resp. en tout point de I). Dans ce cas la dérivée k-ième de f en a est le nombre dérivé de la fonction $f^{(k-1)}$ en a : $f^{(k)}(a) = [f^{(k-1)}]'(a)$.

Remarque. i) Les notations $f^{(0)}$ et $f^{(1)}$ désignent f et f'.

ii) Si $f : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable, alors, pour tout couple (p, q) d'entiers naturels tels que $p + q \leq n$, on a $[f^{(q)}]^{(p)} = [f^{(p)}]^{(q)} = f^{(p+q)}$.

c) Fonctions de classe C^k. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite de classe C^1 si elle est dérivable (sur I) et sa dérivée f' est continue (sur I). Plus généralement, f est dite de classe C^k si elle est k fois dérivable (sur I) et sa dérivée k-ième $f^{(k)}$ est continue sur I.

Remarque. Si f est $k+1$ fois dérivable sur I, elle est de classe C^k.

Propriétés.

- Si $f, g : I \to R$ sont deux fonctions de classe C^n, alors $f + g$ et fg sont de classe C^n, et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \text{(formule de Leibniz)}$$

  Si de plus g ne s'annule en aucun point de I, la fonction f/g est de classe C^n.

- Si $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont de classe C^n, alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^n.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite de classe C^∞ si elle est indéfiniment dérivable (c'est-à-dire k fois dérivable pour tout $k \geq 1$). Cela revient à dire que f est de classe C^k pour tout $k \geq 1$.

d) Exemples de calcul de dérivées successives. i) La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est égale à sa dérivée : $\exp' = \exp$. Donc exp est de classe C^∞ et $\exp^{(k)} = \exp$ pour tout $k \geq 1$.

ii) La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^∞ : $\sin' = \cos$, $\sin'' = -\sin$, $\sin^{(3)} = -\cos$, $\sin^{(4)} = \sin$... De manière générale, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sin^{(4p)} = \sin$, $\sin^{(4p+1)} = \cos$, $\sin^{(4p+2)} = -\sin$, $\sin^{(4p+3)} = -\cos$.

iii) Soit α un réel. La fonction $p_\alpha :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $p_\alpha(x) = x^\alpha$ est de classe C^∞, et $p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, $p''_\alpha(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, ... , $p_\alpha^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$.

iv) . Dérivées successives d'une fonction polynomiale. Considérons par exemple une fonction polynomiale de degré 4, $Q : x \mapsto a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Q est de classe C^∞ (sur $\mathbb{R}$), et $Q'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$, $Q^{(2)}(x) = 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2$, $Q^{(3)}(x) = 24a_4x + 6a_3$, $Q^{(4)}(x) = 24a_4$, $Q^{(5)}(x) = 0$.

De manière générale, toute fonction polynomiale P de degré n est de classe C^∞; si $1 \leq k \leq n$, $P^{(k)}$ est une fonction polynomiale de degré $n-k$ (en particulier la fonction $P^{(n)}$ est constante). Si $k > n$, $P^{(k)} = 0$.

a) Factorielle d'un entier naturel. La factorielle de $n \in \mathbb{N}$ (on dit aussi "factorielle n", ou "n factorielle") est notée $n!$; si $n \geq 1$, il s'agit du produit des entiers compris entre 1 et n : $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$,...
On pose par ailleurs $0! = 1$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = (n+1)n!$.
L'entier naturel $\binom{n}{k}$ (appelé "k parmi n") qui apparaît dans la formule de Leibniz peut être défini par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \,.$$

b) Considérons une fonction polynomiale $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n : $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. On a : $P(0) = a_0$, $P'(0) = a_1$, $P''(0) = 2a_2$ ...
Pour $0 \leq k \leq n$, $P^{(k)}(0) = k! a_k$. D'où la formule

$$P(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n \,.$$

Plus généralement, pour toute fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à n, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,.$$

Cette formule, appelée formule de Taylor pour les polynômes, peut aussi s'écrire

$$\forall h \in \mathbb{R}\,,\ P(a+h) = P(a) + P'(a)h + \frac{P''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}h^n\,. \tag{13}$$

c) La formule de Taylor-Young est une formule locale, qui donne seulement des informations sur le comportement d'une fonction au voisinage d'un point a donné. Au voisinage de ce point, la fonction est approchée par une fonction polynomiale.

Théorème (formule de Taylor Young). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n et soit $a \in I$. On a

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^n\epsilon(h)\,,\ \text{avec}\ \lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0\,.$$

Remarques.

- La formule ci-dessus est appelée formule de Taylor-Young pour la fonction f à l'ordre n en a (ou au voisinage de a). La fonction $h \mapsto f(a+h)$ est approchée (pour h voisin de 0) par la fonction polynomiale $P_n : h \mapsto f(a) + f'(a)h + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$. La fonction $h \mapsto h^n\epsilon(h)$ est appelée le reste. Le point essentiel est que $\lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0$, ce qui peut se traduire par : $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - P_n(h)}{h^n} = 0$.

- Lorsque h est très proche de 0, on a $h^n << h^{n-1} << \ldots << h^2 << h << 1$, où le symbol $<<$ signifie "est beaucoup plus petit (en valeur absolue) que". Plus n est grand, plus l'approximation de $f(a+h)$ par $P_n(h)$ (pour $|h|$ petit) est précise.

  A l'ordre 0, on a simplement $f(a+h) = f(a) + \epsilon_0(h)$, avec $\lim_{h\to 0}\epsilon_0(h) = 0$ (il s'agit juste de la continuité de f en a). La formule à l'ordre 1 donne des précisions sur la fonction ϵ_0 : $\epsilon_0(h)$ est égal à h fois un nombre proche de $f'(a)$, plus précisément $\epsilon_0(h) = f'(a)h + h\epsilon_1(h)$, avec $\lim_{h\to 0}\epsilon_1(h) = 0$. La formule à l'ordre 2 donne des précisions sur ϵ_1, etc.

- La formule de Taylor-Young reste valide si on suppose seulement que f est n fois dérivable en a ($n \geq 1$).

d) Exemple 1. Formule de Taylor-Young pour la fonction cos en 0 : on a

$$\cos(0) = 1\ , \quad \cos'(0) = -\sin(0) = 0\ , \quad \cos''(0) = -\cos(0) = -1\ ,$$
$$\cos^{(3)}(0) = \sin(0) = 0\ , \quad \cos^{(4)}(0) = \cos(0) = 1\ ,$$

ce qui donne :

i) à l'ordre 0 : $\cos x = 1 + \epsilon_0(x)$

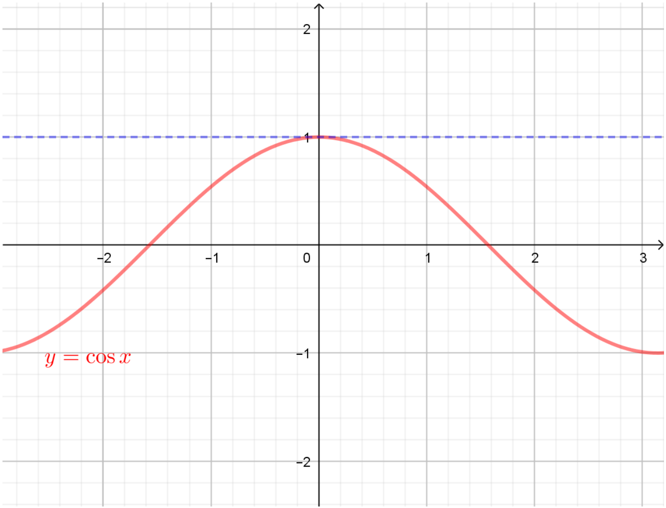
ii) à l'ordre 1 : $\cos x = 1 + x\epsilon_1(x)$

iii) à l'ordre 2 : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + x^2\epsilon_2(x)$

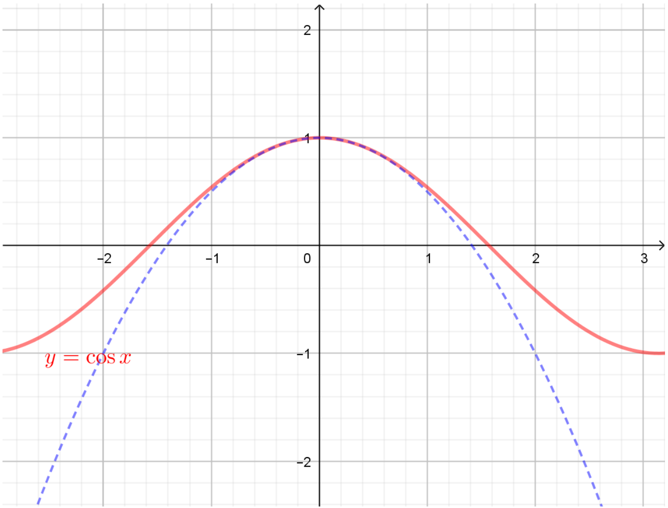
iv) à l'ordre 3 : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + x^3\epsilon_3(x)$

v) à l'ordre 4 : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + x^4\epsilon_4(x)$

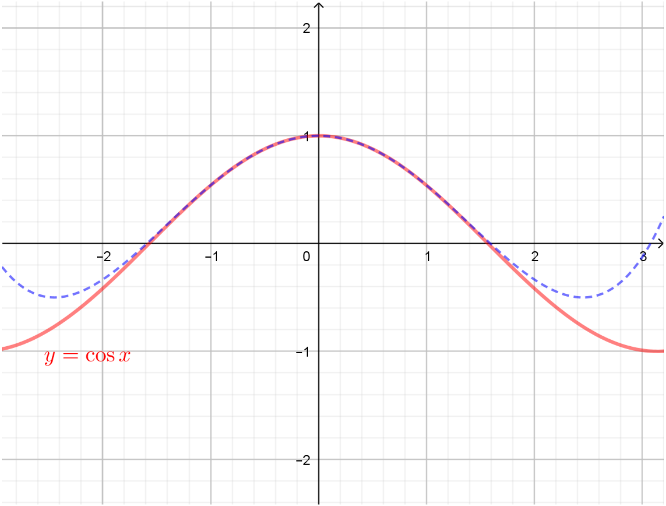
où $\lim_{x\to 0} \epsilon_k(x) = 0$ $(0 \leq k \leq 4)$.



Approximation au voisinage de 0 de $\cos x$ par $P_0(x) = 1$.



Approximation au voisinage de 0 de $\cos x$ par $P_2(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$.



Approximation au voisinage de 0 de $\cos x$ par $P_4(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

e) Exemple 2. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$: on a

$f(0) = 1$; $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$;

$f''(x) = \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$, $f''(0) = -\frac{1}{4}$;

$f^{(3)}(x) = -\frac{1}{4} \times (-\frac{3}{2}(1+x)^{-\frac{5}{2}}) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$, $f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}$.

Formule de Taylor-Young de f en 0 :

i) à l'ordre 0 : $\sqrt{1+x} = 1 + \epsilon_0(x)$

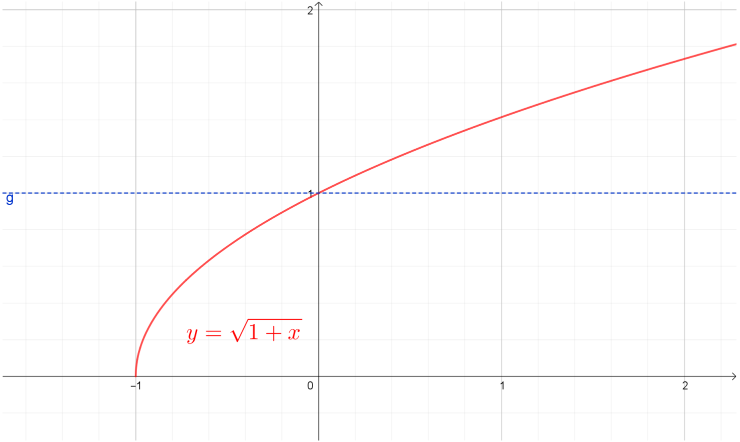
ii) à l'ordre 1 : $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + x\epsilon_1(x)$

iii) à l'ordre 2 : $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{2!4} + x^2\epsilon_2(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + x^2\epsilon_2(x)$

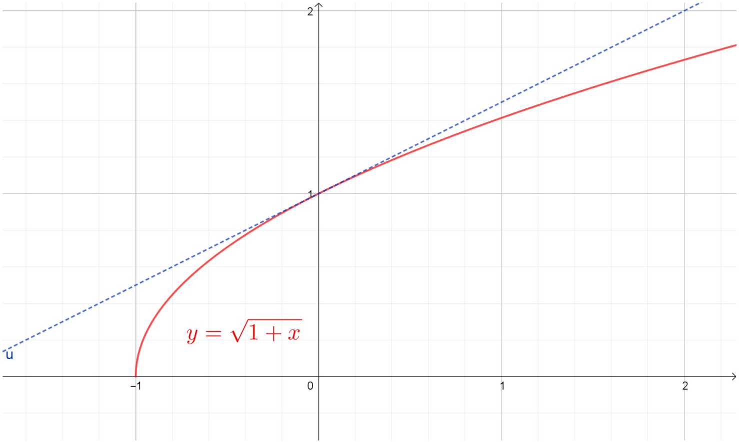
iv) à l'ordre 3 :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3}{3!8}x^3 + x^3\epsilon_3(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\epsilon_3(x)$$

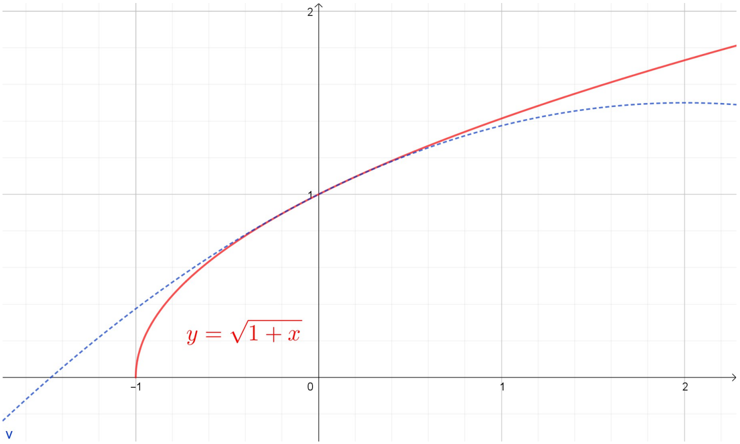
où $\lim_{x\to 0} \epsilon_k(x) = 0$ $(0 \leq k \leq 3)$.



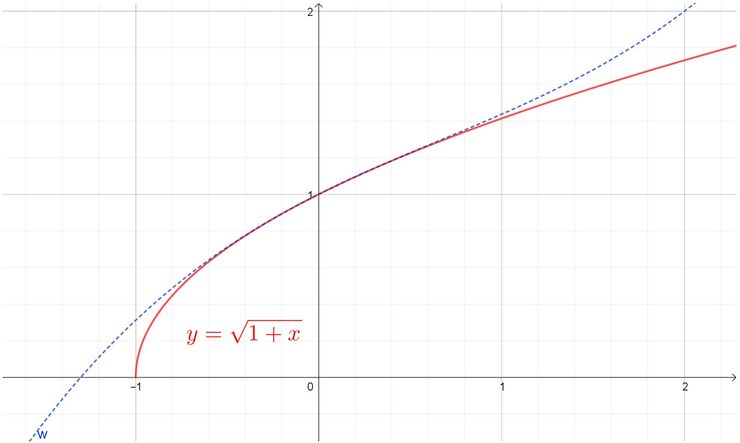
Approximation au voisinage de 0 de $\sqrt{1+x}$ par $P_0(x) = 1$.



Approximation au voisinage de 0 de $\sqrt{1+x}$ par $P_1(x) = 1 + \dfrac{x}{2}$.



Approximation au voisinage de 0 de $\sqrt{1+x}$ par $P_2(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$.



Approximation au voisinage de 0 de $\sqrt{1+x}$ par $P_3(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16}$.

7.3 Notion de développement limité

a) On a vu que la formule de Taylor-Young fournit une approximation fine d'une fonction au voisinage d'un point x_0, en utilisant les dérivées successives de la fonction. Ce type d'approximation est appelé un développement limité.

On dit qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction $\epsilon :]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}$ tels que $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$ et

$$\forall h \in]-\alpha, \alpha[\,,\; f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots + a_n h^n + h^n \epsilon(h)\,. \qquad (14)$$

$P_n(h) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n$ est appelé la partie régulière du développement limité ; $h^n\epsilon(h)$ est appelé le reste du développement limité . Lorsque h tend vers 0, la valeur absolue $|h^n\epsilon(h)|$ devient beaucoup plus petite que $|h^p|$ pour $p \leq n$.

Remarques.

- Si la fonction f admet un développement limité en x_0, celui-ci est unique (c'est-à-dire que les nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et la fonction ϵ de la définition sont uniques); en particulier, on a $a_0 = f(x_0)$.
- La propriété essentielle de la définition est $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - (a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n)}{h^n} = 0\,.$$

- Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0,

$$f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + h^n \epsilon(h)\,,$$

  alors pour tout $p < n$, f admet un développement limité à l'ordre p en x_0, obtenu à partir de celui de degré n par troncature, en faisant entrer dans le reste tous les termes de degré $> p$:

$$f(x_0+h) = a_0 + \ldots + a_p h^p + h^p \epsilon_1(h)\,,\ avec \lim_{h\to 0} \epsilon_1(h) = 0$$

- Plus l'ordre n est grand, plus le développement limité donne une approximation précise de f au voisinage de x_0.

- Si f est de classe C^n sur un voisinage $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ de x_0, f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, qui est donné par la formule de Taylor-Young.
- f admet un développement limité à l'ordre 0 en x_0 si et seulement si f est continue en x_0 : on a alors $f(x_0 + h) = f(x_0) + \epsilon(h)$, avec $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.
- f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0 : on a alors $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\epsilon(h)$, avec $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.

b) Quelques développement limité usuels en 0. Ces DL sont obtenus par la formule de Taylor-Young. Dans chacune de ces formules ϵ est une fonction (pas la même pour toutes les formules!) qui vérifie $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$.

i) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$

ii) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^n \epsilon(x)$

iii) $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x)$

iv) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)$

v) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$

Par exemple, avec $\alpha = 1/2$ et $n = 2$, on obtient $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\epsilon(x)$.

vi) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$

vii) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\epsilon(x)$

c) Remarque. Il existe des règles de calcul qui permettent d'obtenir assez simplement le DL d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions f et g à partir des DL de f et de g. Par exemple, si f et g admettent un DL à l'ordre n en un point a, alors $f+g$ et fg admettent aussi un DL à l'ordre n en a. La partie régulière du DL de $f+g$ est la somme des parties régulières des DL de f et de g. La partie régulière du DL de fg est obtenue en effectuant le produit des parties régulières des DL de f et de g et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

7.4 Utilisation de DL pour des calculs de limites

Les développements limités permettent (entre autres applications) de calculer des limites lorsqu'on est en présence d'une forme indéterminée.

Exemples.

1. On cherche $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$. Lorsque x tend vers 0, $\cos x$ tend vers $\cos 0 = 1$, donc $\cos x - 1$ tend vers 0. Comme x^2 tend aussi vers 0, on a affaire à une forme indéterminée ("$\frac{0}{0}$"). On va utiliser le DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction cos pour résoudre cette forme indéterminée. On a

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)\,, \text{ avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$$

Donc

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \epsilon(x)\,.$$

D'où $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

2. On pose $u(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2(x-1)}$ et on cherche la limite éventuelle de $u(x)$ lorsque x tend vers 0. Lorsque x tend vers 0, $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2$ et $x^2(x-1)$ tendent tous les deux vers 0, et on a encore affaire à une forme indéterminée. On va utiliser le DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$. On a :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\epsilon(x)\,,\ \text{avec}\ \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0\,.$$

En substituant $-x$ à x, on obtient $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + x^2\epsilon(-x)$. Et donc

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2 = -\frac{x^2}{4} + x^2(\epsilon(x)+\epsilon(-x))\,.$$

Donc $u(x) = \dfrac{-\frac{1}{4}+\epsilon(x)+\epsilon(-x)}{x-1}$. Lorsque x tend vers 0, $-x$ tend aussi vers 0 et donc $\epsilon(x)$ et $\epsilon(-x)$ tendent tous deux vers 0. On obtient ainsi $\lim_{x\to 0} u(x) = 1/4$.