Exercice 18

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

1-a) sh est impaire : $sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -sh(x)$

ch est paire : $ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = ch(x)$

1.b) $ch(x) + sh(x) = e^x$

$ch(x) - sh(x) = e^{-x}$

$$\Rightarrow \quad ch^2(x) - sh^2(x) = (ch(x) + sh(x))(ch(x) - sh(x)) = e^x . e^{-x} = 1$$

$$ch^2(x) - sh^2 x = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} ch^2(x) = 1 + sh^2(x) \\ ch(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow ch(x) = \sqrt{1 + sh^2(x)}$$

1. c) $sh(a+b) = sh(a)ch(b) + ch(a).sh(b)$

$ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b)$

Il suffit de calculer les deux membres de chaque égalité et de comparer :

$$sh(a)ch(b) + ch(a)sh(b) = \frac{e^a - e^{-a}}{2} . \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a + e^{-a}}{2} . \frac{e^b - e^{-b}}{2}$$

$$= \frac{e^{a+b} - e^{-(a+b)}}{2}$$

2.a) $sh(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

$sh'(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ $\quad [\, (e^{x})' = e^{x},\ (e^{-x})' = -e^{-x} \,]$

$ch'(x) = sh(x)$

$sh'(x) > 0 \ \forall x$

sh est strict $\nearrow$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$sh(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$ch(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2.b) Sh étant strictement croissante et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Alors Sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction réciproque d'une fonction dérivable qui ne s'annule jamais.

$$\begin{cases} y = sh(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \operatorname{argsh}(y) \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\operatorname{argsh}'(y) = \frac{1}{sh'(x)} = \frac{1}{ch(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + sh^2(x)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

$$\boxed{\operatorname{argsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}}$$

$ch : [0,+\infty[\longrightarrow [1,+\infty[$ est une fonction strictement croissante et continue, et $f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc ch est une bijection de $[0,+\infty[$ dans $[1,+\infty[$

argch est dérivable en tout point $y = ch(x)$ avec $ch'(x) \neq 0$ c.à.d. $sh(x) \neq 0$ i.e. $x \neq 0$ et $y \neq 1$.

ou encore argch est dérivable sur $]1,+\infty[$

$$\begin{cases} y = ch(x) \\ x \in [0,+\infty[\end{cases} \iff \begin{array}{l} x = \operatorname{argch}(y) \\ y \in [1,+\infty[\end{array}$$

$$\operatorname{argch}'(y) = \frac{1}{ch'(x)} = \frac{1}{sh(x)}$$

or $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$, donc

$$sh^2(x) = ch^2(x) - 1$$

$$sh(x) = \sqrt{ch^2(x) - 1} = \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\boxed{\arg ch'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \quad \forall y \in]1, +\infty[}$$

Exercice 19

formule de Taylor-Young de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec I un voisinage de 0 :

$$\begin{cases} f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x) \\ \lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

valable si f est n-fois dérivable en 0.

$\underline{n=2}$
$$\begin{cases} f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \\ \lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0. \end{cases}$$

- $f(x) = e^{x/2}$, $f'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$ $f''(x) = \frac{1}{4}e^{x/2}$

  $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, $f''(0) = \frac{1}{4}$

  $e^{x/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$

- $g(x) = (1+x)^{1/2}$ $g'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$ $g''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$

  $g(0) = 1$, $g'(0) = \frac{1}{2}$ $g''(x) = -\frac{1}{4}$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x/2} - \sqrt{1+x}}{x^2}$$

D'après la question précédente :

$$\frac{e^{x/2} - \sqrt{1+x}}{x^2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)\right) - \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}x^2 + x^2\left(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)\right)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{4} + \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$$

Comme $\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$, on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x/2} - \sqrt{1+x}}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$\boxed{\text{Exercice 20}}$

$f(x) = \ln(1-x) \qquad f'(x) = -\frac{1}{1-x} = -(1-x)^{-1}$

$f''(x) = -(1-x)^{-2} \qquad f^{(3)}(x) = -2(1-x)^{-3}$

$f(0) = 0, \quad f'(0) = -1, \quad f''(0) = -1, \quad f^{(3)}(0) = -2$

$$f(x) = -x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}(-2) + x^3\varepsilon(x)$$

$$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$$

a) $$\frac{2\ln(1-x) + x(x+2)}{x^3}$$

$$= \frac{2\left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)\right] + x^2 + 2x}{x^3}$$

$$= \frac{-\frac{2}{3}x^3 + 2x^3\varepsilon(x)}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{3} + 2\varepsilon(x)$$

D'où $$\lim_{x \to 0} \frac{2\ln(1-x) + x(x+2)}{x^3} = -\frac{2}{3}$$

b) $g(x) = x^{2,5}$ $\quad g'(x) = 2,5\, x^{1,5}$

$$g''(x) = (2,5) \times (1,5)\, x^{0,5}$$

$$g(1) = 1, \quad g'(1) = 2,5 \quad g''(1) = 15/4$$

$$\begin{cases} g(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{g''(1)}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x) \\ \lim\limits_{x \to 1} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = 1 + 2,5(x-1) + \frac{15}{8}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$$

$$\frac{x^{2/5} + 1{,}5 - 2{,}5x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1 + 2{,}5(x-1) + \frac{15}{8}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x) + 1{,}5 - 2{,}5x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{\frac{15}{8}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{15}{8} + \varepsilon(x) \qquad \left(\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0 \right)$$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{2/5} + 1{,}5 - 2{,}5x}{(x-1)^2} = \frac{15}{8}$