Analyse 1, L1

CORRIGÉ TD1

Fernando Costa Jr.

EX 1

a) $5x+2 \geq -3 \iff x \geq -1 \iff x \in]-1,+\infty[$

b) $2x-1 < 4x+3 \leq -x+6 \iff$

$\iff 2x-1 < 4x+3$ et $4x+3 \leq -x+6$

$\iff 2x > -4$ et $5x \leq 3$

$\iff x > -2$ et $x \leq \frac{3}{5}$

$\iff x \in]-2,+\infty[\cap]-\infty, \frac{3}{5}]$

$\iff x \in]-2, \frac{3}{5}]$.

c) $|x-1| < 4 \iff -4 < x-1 < 4$

$\iff -3 < x < 5$

$\iff x \in]-3, 5[$.

d) $|x-2| \geq 3 \iff x-2 \leq -3$ ou $x-2 \geq 3$

$\iff x \leq -1$ ou $x \geq 5$

$\iff x \in]-\infty,-1] \cup [5,+\infty[$.

e) $|x-2| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x-2 \leq |x| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -|x| \leq x-2$ et $x-2 \leq |x|$

$\Leftrightarrow |x| \geq -x+2$ et $|x| \geq x-2$

$\Leftrightarrow (x \leq -(-x+2)$ ou $x \geq -x+2)$ et $(x \leq -x+2$ ou $x \geq x-2)$

$\Leftrightarrow (\underbrace{-2 \geq 0}_{\emptyset}$ ou $2x \geq 2)$ et $(2x \leq 2$ ou $\underbrace{-2 \leq 0}_{\mathbb{R}})$

$\Leftrightarrow x \in (\emptyset \cup [1,+\infty[) \cap (]-\infty,1] \cup \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow x \in [1,+\infty[$.

e) Deuxième solution Cherchons d'abord les solutions dans $\mathbb{R}_+$.

$|x-2| \leq |x| \Leftrightarrow |x-2| \leq x \Leftrightarrow -x \leq x-2 \leq x$

$\Leftrightarrow -x \leq x-2$ et $x-2 \leq x$

$\Leftrightarrow -x \leq x-2$ et $x-2 \leq x$

$\Leftrightarrow x \geq 1$ et

$\Leftrightarrow x \in [1, +\infty[\cap \mathbb{R}_+ = [1, +\infty[$.

Maintenant, cherchons les solutions dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$.

$|x-2| \leq |x| \Leftrightarrow |x-2| \leq -x \Leftrightarrow x \leq x-2 \leq -x$

$\Leftrightarrow x \leq x-2$ et $x-2 \leq -x$

$\Leftrightarrow \underbrace{x \leq x-2}_{\text{impossible}}$

Donc il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, $|x-2| \leq |x|$ définit le sous-ensemble $[1, +\infty[$.

f) $|x-2| + |x+2| > 3 \Leftrightarrow |x-2| > 3 - |x+2| \Leftrightarrow$

$x-2 < |x+2| - 3$ ou $x-2 > 3 - |x+2|$

$\Leftrightarrow x-2 < |x+2| - 3$ ou $|x+2| > 5 - x$

$\Leftrightarrow |x+2| > x+1$ ou

$\Leftrightarrow x+2 < -x-1$ ou $x+2 > x+1$ ou $x+2 < x-5$ ou $x+2 > 5-x$

$\Leftrightarrow 2x < -3$ ou $2 > 1$ ou $2 < -5$ ou $2x > 3$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{-3}{2}[\cup \mathbb{R} \cup \emptyset \cup]\frac{3}{2}, +\infty[= \mathbb{R}$.

Alors, $|x-2| + |x+2| > 3$ définit l'ensemble $\mathbb{R}$.

A) Deuxième solution

On regarde d'abord les signes de $(x-2)$ et $(x+2)$.

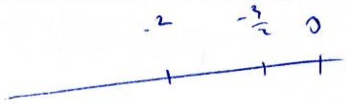
x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	

On cherche les solutions sur trois cas :

1) $x \leq -2$

Alors,

$$|x-2|+|x+2|>3 \iff -x+2-x-2>3$$
$$\iff 2x<-3$$
$$\iff x<\frac{-3}{2}$$



$$\therefore\ S_1 =]-\infty, -2].$$

2) $-2 < x < 2$

Alors,

$$|x-2|+|x+2|>3 \iff -\cancel{x}+2+\cancel{x}+2>3 \iff 4>3$$

~~$-x+2+x+2>3$~~

$$\therefore\ S_2 =]-2, 2[.$$

3) $x \geq 2$

Alors,

$$|x-2|+|x+2| > 3 \iff x-2+x+2 > 3$$

$$\iff 2x > 3$$

$$\iff x > \frac{3}{2}$$

$\therefore S_3 = [2, +\infty[.$

Par conséquent, $|x-2|+|x+2|>3$ définit l'ensemble

$$S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \mathbb{R}.$$

g) $\sqrt{x+1} < 2$

Déjà, $x \geq -1$ pour que $\sqrt{x+1} \in \mathbb{R}$.

Ensuite, la fonction $f(z)=z^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$

donc $(\sqrt{x+1})^2 < 2^2 \iff |x+1| < 4 \overset{x \geq -1}{\iff} x+1 < 4$

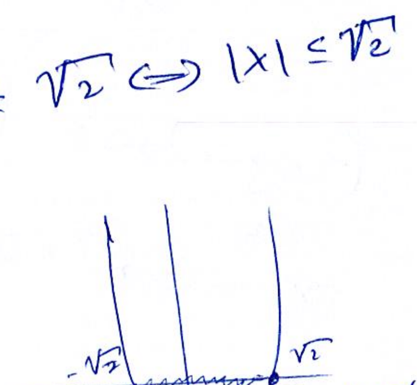
$\iff x < 3$. Alors,

$$S_g = [-1, 3[.$$

h) $x^2+1 \leq 3 \iff x^2 \leq 2 \overset{z \mapsto \sqrt{z} \text{ croiss.}}{\iff} \sqrt{x^2} \leq \sqrt{2} \iff |x| \leq \sqrt{2}$

$\iff -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

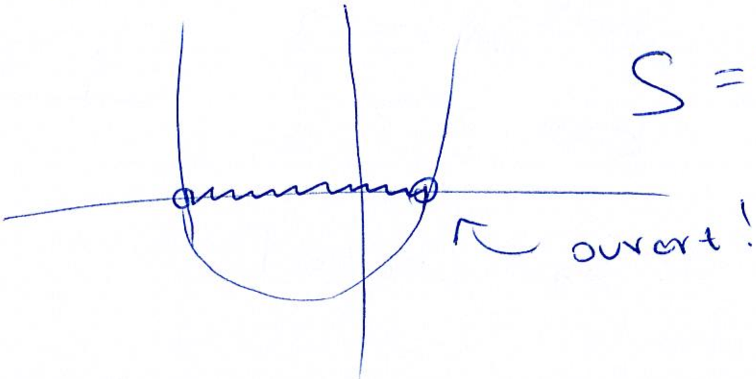
$\therefore S_h = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$



i) $x^2+3x<4 \iff x^2+3x-4<0$

$\Delta = 9-4\cdot1(-4) = 9+16 = 25, \quad \sqrt{\Delta}=5$

$x_1 = \dfrac{-3+5}{2} = 1, \quad x_2 = \dfrac{-3-5}{2} = -4$



$S =]-4, 1[.$

j) $x^3-3x^2+2x \geq 0$

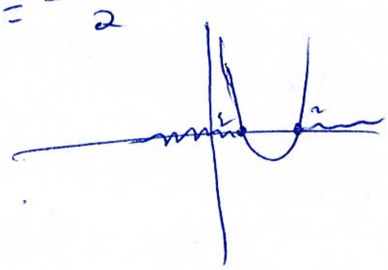
$x=0$ est solution.

Regardons ~~$x\geq0$~~ le cas $x>0$.

$x^3-3x^2+2x \geq 0 \overset{\times\frac{1}{x}}{\iff} x^2-3x+2 \geq 0$

$\Delta = 9-8=1, \quad \sqrt{\Delta}=1.$

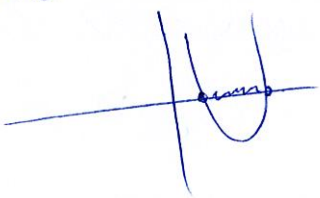
$x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2, \quad x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1.$



$S_1 =]0, 1] \cup [2, +\infty[.$

Regardons le cas $x<0$.

$x^3-3x^2+2x \geq 0 \overset{\times\frac{1}{x}}{\iff} x^2-3x+2 \leq 0$



$S_2 = \emptyset$

$\therefore \; S = \{0\} \cup S_1 \cup S_2 = [0,1] \cup [2,+\infty[.$

k) Signe:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	

<u>1er cas</u> : $x < 0$

Alors,

$$|x|+|x-1| \leq 2 \iff -x-x+1 \leq 2$$
$$\iff 2x \geq -1$$
$$\iff x \geq \frac{-1}{2}$$

$$\therefore S_1 = \left[-\frac{1}{2}, 0\right[.$$

<u>2ème cas</u> : $0 \leq x \leq 1$

Alors,

$$|x|+|x-1| \leq 2 \iff x-x+1 \leq 2$$
$$\iff 1 \leq 2 \quad \underline{\text{vrai}}$$

$$\therefore S_2 = [0, 1].$$

<u>3ème cas</u> : $x > 1$

Alors,

$$|x|+|x-1| \leq 2 \iff x+x-1 \leq 2$$
$$\iff 2x \leq 3$$
$$\iff x \leq \frac{3}{2}$$

$$\therefore S_3 = \left]1, \frac{3}{2}\right].$$

Par conséquent, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left[\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Ex 2

$$|f(-1)| = 3 \iff |a(-1)+b| = 3$$
$$\iff |b-a| = 3$$

$$|f(2)| = 2 \iff |2a+b| = 2$$

1er cas : $b \geq a$

Alors $|b-a| = 3 \iff b-a = 3 \iff b = a+3$.

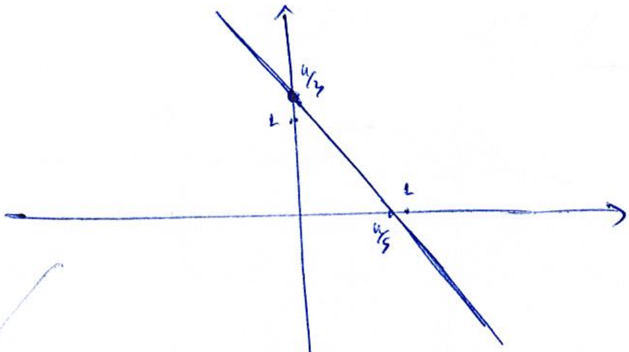
$$|2a+b| = 2 \iff |3a+3| = 2$$
$$\iff |a+1| = \frac{2}{3}$$
$$\iff a = \frac{-2}{3} - 1 \quad \text{ou} \quad a = \frac{+2}{3} - 1$$
$$\iff \begin{pmatrix} a = \frac{-5}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a = \frac{-1}{3} \\ b = \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

2ème cas $b < a$

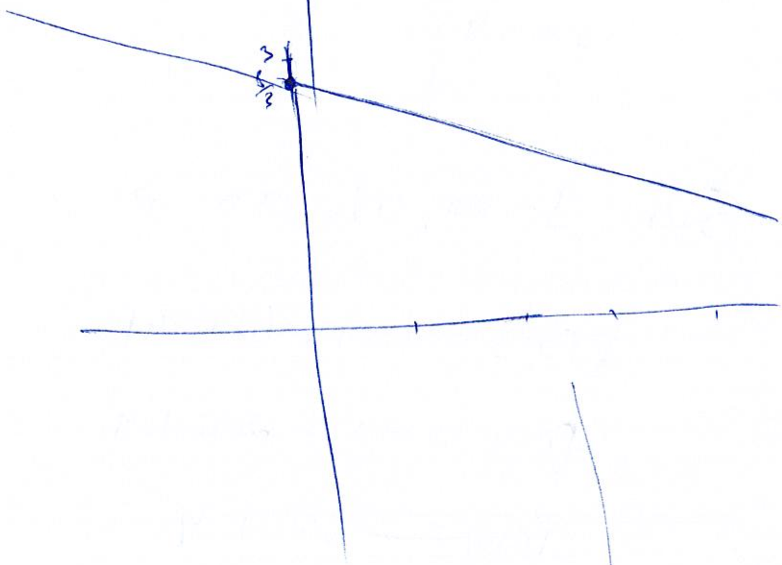
Alors $|b-a| = 3 \iff a-b = 3 \iff b = a-3$.

Donc, $|2a+b| = 2 \iff |3a-3| = 2$
$$\iff |a-1| = \frac{2}{3}$$
$$\iff a = -\frac{2}{3} + 1 \quad \text{ou} \quad a = \frac{2}{3} + 1$$
$$\iff \begin{pmatrix} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{-8}{3} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a = \frac{5}{3} \\ b = \frac{-4}{3} \end{pmatrix}$$

$$(a,b) = \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

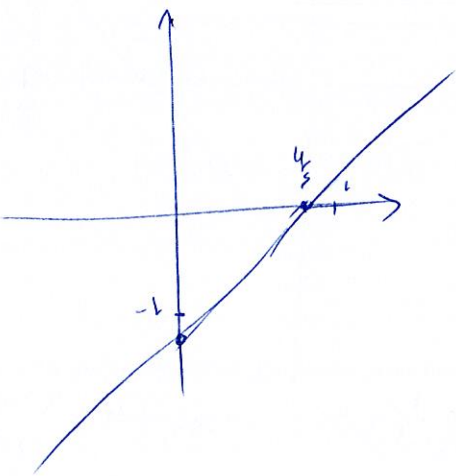


$$(a,b) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{8}{3}\right)$$



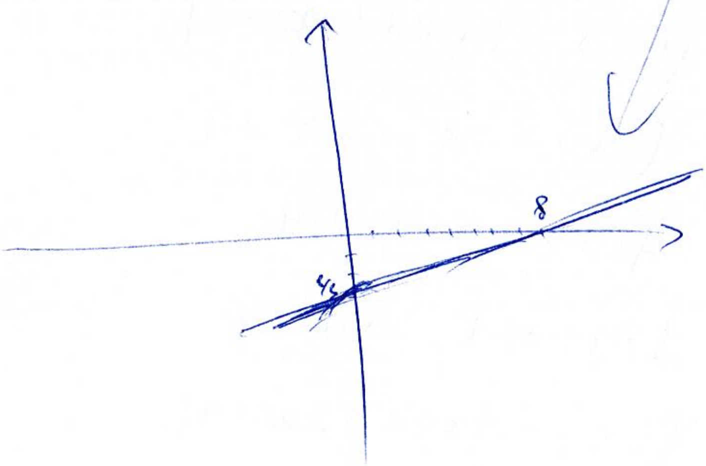
inv.

$$(a,b) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$



$$(a,b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-8}{3}\right)$$

inv.

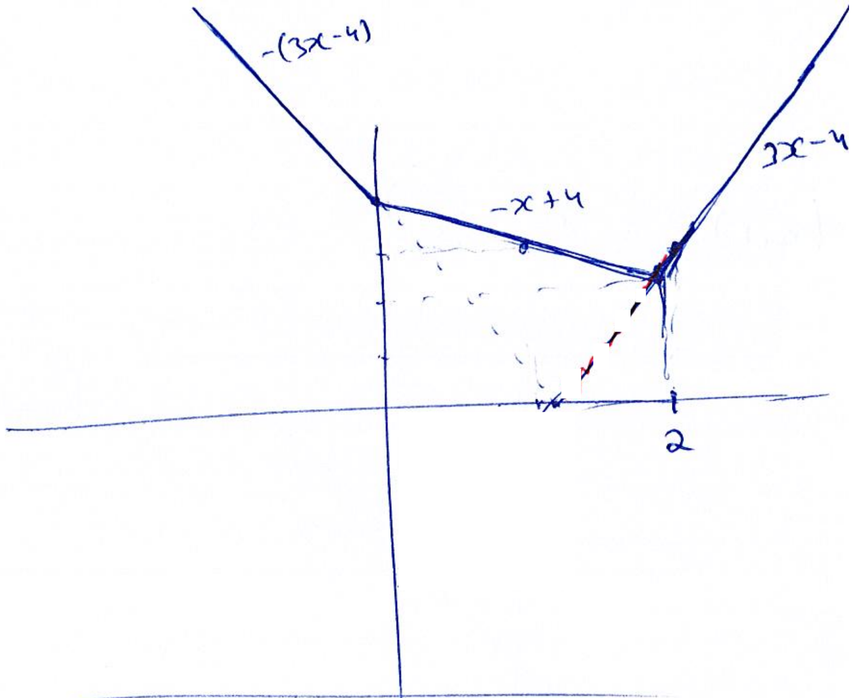


EX-3 a) Signes :

x	$-\infty$		0		2	
x		$-$	0	$+$		$+$
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$

Sur $]-\infty, 0[$, on a

$$f(x) = |x| + |2x-4|$$
$$f(x) = -x - 2x + 4$$
$$f(x) = -3x + 4$$



Sur $[0, 2]$, on a

$$f(x) = |x| + |2x-4|$$
$$f(x) = x - 2x + 4$$
$$f(x) = -x + 4$$

Sur $]2, +\infty[$, on a

$$f(x) = |x| + |2x-4|$$
$$f(x) = x + 2x - 4$$
$$f(x) = 3x - 4$$

b) $f(\mathbb{R}) = [2, +\infty[$

f est minorée par 2

f n'est pas majorée

c) $f^{-1}(3)$: Sur $]-\infty, 0]$

$-3x + 4 = 3$

$\Rightarrow -3x = -1$

$\Rightarrow x = \frac{1}{3} \notin]-\infty, 0]$

$\Rightarrow$ pas d'antécédent dans $]-\infty, 0]$.

Sur $[0, 2]$

$-x + 4 = 3 \Leftrightarrow x = 1$

$\Rightarrow$ 1 est antécéd.

Sur $[2, +\infty[$

$3x - 4 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$

$\Rightarrow \frac{7}{3}$ est antécéd.

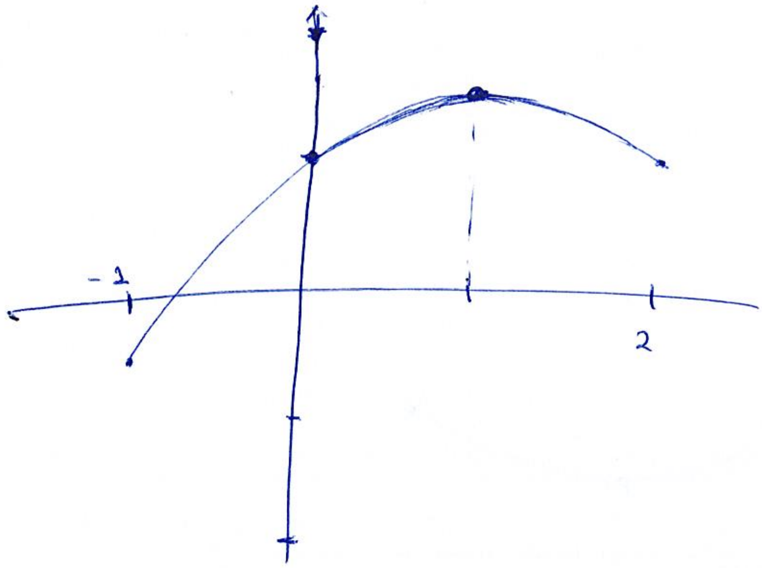
Donc, $f^{-1}(3) = \{1, \frac{7}{3}\}$.

Similairement,

$f^{-1}(1) = \emptyset$, $f^{-1}(2) = \{2\}$.

EX.4 a) i) $-f(x)$ est bien définit $\forall x \in [-1,2]$

donc l'ens. de déf. de $x \mapsto -f(x)$ est $[-1,2]$.



ii) $f(-x)$ est bien définit $\forall -x \in [-1,2]$, càd,

$-1 \le -x \le 2 \iff -2 \le x \le 1$

$\forall x \in [-2,1]$. Donc,

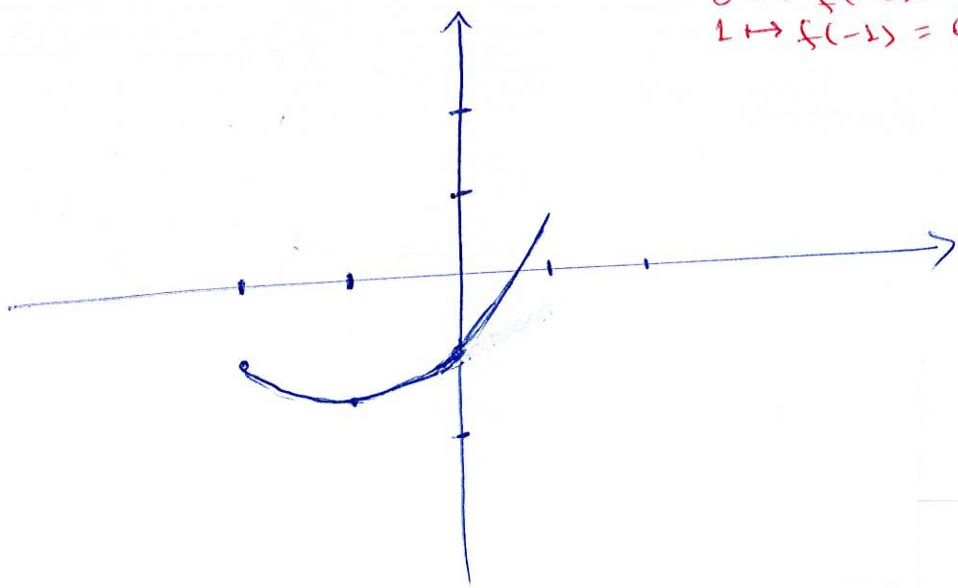
l'ensemble de déf. de $x \mapsto f(-x)$ est $[-2,1]$

$-2 \mapsto f(-(-2)) = f(2) = -1$

$-1 \mapsto f(-(-1)) = f(1) = -1.5$

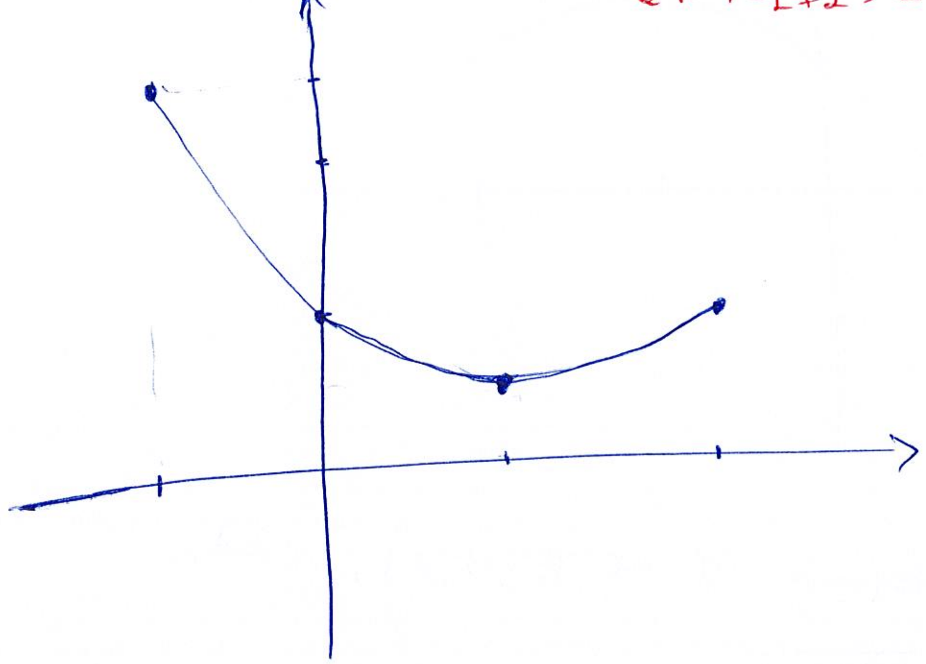
$0 \mapsto f(-0) = f(0) = -2$

$1 \mapsto f(-1) = 0.5$



iii) $f(x)+2$ est définit $\forall x \in [-1,2]$, donc l'ens. de déf. de $x \mapsto f(x)+2$ est $[-1,2]$.

$-1 \mapsto 2.5$
$0 \mapsto -1+2 = 1$
$1 \mapsto -1.5+2 = 0.5$
$2 \mapsto -1+2 = 1$



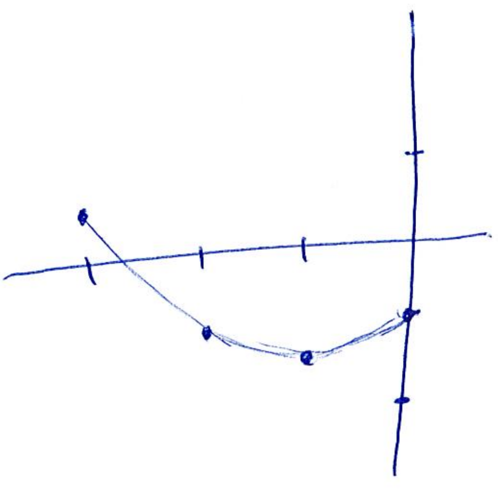
iv) $f(x+2)$ est bien déf. ssi $x+2 \in [-1,2]$, càd

$-1 \leq x+2 \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 0$

ssi $x \in [-3,0]$.

Donc, l'ens. de déf. de $x \mapsto f(x+2)$ est $[-3,0]$.

$-3 \mapsto f(-3+2) = f(-1) = 0.5$
$-2 \mapsto f(-2+2) = f(0) = -1$
$-1 \mapsto f(-1+2) = f(1) = -1.5$
$0 \mapsto f(0+2) = f(2) = -1$



Ex. 3 b) On suppose que

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Alors,

$$-1 = f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c \Rightarrow c = -1,$$

$$0.5 = f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b(-1) + c = a - b - 1$$

$$\Rightarrow a = b + 1.5, \quad (*)$$

$$-1.5 = f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b - 1$$

$$\Rightarrow a + b = -0.5$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} b + 1.5 + b = -0.5$$

$$\Rightarrow b = \cancel{-0.5} = -1$$

$$\Rightarrow a = 0.5$$

Par conséquent,

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x - 1.$$

Ex-5 a) $f : x \mapsto x^2+2$, $g : x \mapsto \frac{1}{x}$

"Notation : D_f = ensemble de déf. de f"

On a :

$$\underline{D_f = \mathbb{R}}, \quad \underline{D_g = \mathbb{R}^*} \Rightarrow \underline{\underline{D_{f\circ g} = \mathbb{R}^*}}$$

Puisque

$$g\circ f(x) = g(f(x)),$$

On a

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2+2 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -2\} \\ &= \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donc

$$\underline{\underline{D_{g\circ f} = \mathbb{R}}}.$$

Enfin,

$$\underline{\underline{g\circ f(x) = \frac{1}{x^2+2}}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{f\circ g(x) = \frac{1}{x^2}+2}}.$$

#

EX.5 b) $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $g : x \mapsto x^2 - 1$.

On trouve

$$\underline{D_f = \mathbb{R}_+}, \quad \underline{D_g = \mathbb{R}} \Rightarrow \underline{D_{g\circ f} = \mathbb{R}_+}.$$

Puisque

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 1},$$

on a

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geqslant 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant 1\} \\ &=]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \end{aligned}$$

donc

$$\underline{D_{f\circ g} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}.$$

Enfin, vu que $(g\circ f)(x) = (\sqrt{x})^2 - 1 = |x| - 1$, on obtient

$$\underline{(f\circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{et} \quad \underline{(g\circ f)(x) = x - 1}.$$

$\forall x \in D_{f\circ g}$ $\qquad$ $\forall x \in D_{g\circ f}$

#

Ex.5 c) $f : x \mapsto x^2 - 2$, $g : x \mapsto x^3 + 1$.

On a

$$D_f = D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}.$$

En plus,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^3+2) \\ &= (x^3+1)^2 - 2 \\ &= \dots \text{ devoir}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2-2) \\ &= (x^2-2)^3+1. \\ &= \dots \text{ devoir}\end{aligned}$$

#

Ex. 7 a) Soit $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, u paire et v impaire. Alors

$$u(-x) = u(x) \quad \text{et} \quad v(-x) = -v(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

On définit $f(x) = u(x) + v(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, d'où

$$f(-x) = u(x) - v(x).$$

Si l'on fait $f(x) + f(-x)$, on trouve

$$f(x) + f(-x) = [u(x) + v(x)] + [u(x) - v(x)]$$
$$= 2u(x)$$
$$\Rightarrow \boxed{u(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si l'on fait $f(x) - f(-x)$, on a

$$f(x) - f(-x) = [u(x) + v(x)] - [u(x) - v(x)]$$
$$= 2v(x)$$
$$\Rightarrow \boxed{v(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque.

On définit

$$u(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$v(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$u(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2}$$

$$= \frac{f(x) + f(-x)}{2} = u(x),$$

d'où u est paire. En plus,

$$v(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2}$$

$$= -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -v(x),$$

d'où v est impaire.

Reciproquement, si $f = u' + v'$ avec u' paire et v' impaire, on a montré que, forcément,

$$u'(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = u(x) \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = v(x),$$

ce qui montre l'unicité de u et v. #

EX. 5 c) Pour $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^2 - 2x + 4$

on a

$$u(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$= \frac{2x^5 - 3x^4 + x^2 - 2x + 4 + 2(-x)^5 - 3(-x)^4 + (-x)^2 - 2(-x) + 4}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2x^5} - 3x^4 + x^2 - \cancel{2x} + 4 - \cancel{2x^5} - 3x^4 + x^2 + \cancel{2x} + 4}{2}$$

$$= \frac{-6x^4 + 2x^2 + 8}{2}$$

$$= -3x^4 + x^2 + 4$$

Similairement,

$v(x) =$ devoir

Pour $g(x) = \dfrac{1}{2 + \sin x}$ on a

$u(x) =$ devoir

et

$$v(x) = \frac{\frac{1}{2 + \sin x} - \frac{1}{2 + \sin(-x)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2 + \sin x} - \frac{1}{2 - \sin x}}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2} - \sin x - \cancel{2} - \sin x}{2(2 + \sin x)(2 - \sin x)}$$

$$= \frac{-\sin x}{4 - \sin^2 x}$$

EX. 8 $u : x \mapsto \sqrt{1-x^3}$

On cherche l'ens. des $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$1 - x^3 \geq 0 \iff x^3 \leq 1$$
$$\iff x \leq 1.$$

La fonction $x \mapsto x^3$ est croissante, donc $x \mapsto -x^3$ est décroissante. ~~Par~~ conséquent, $x \mapsto 1-x^3$ est décroissante. Puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante,

$$x \longmapsto \sqrt{1-x^3}$$

est une fonction décroissante.

EX. 9 a) Pour $a \in [2,4]$, on a $a > 1$, donc

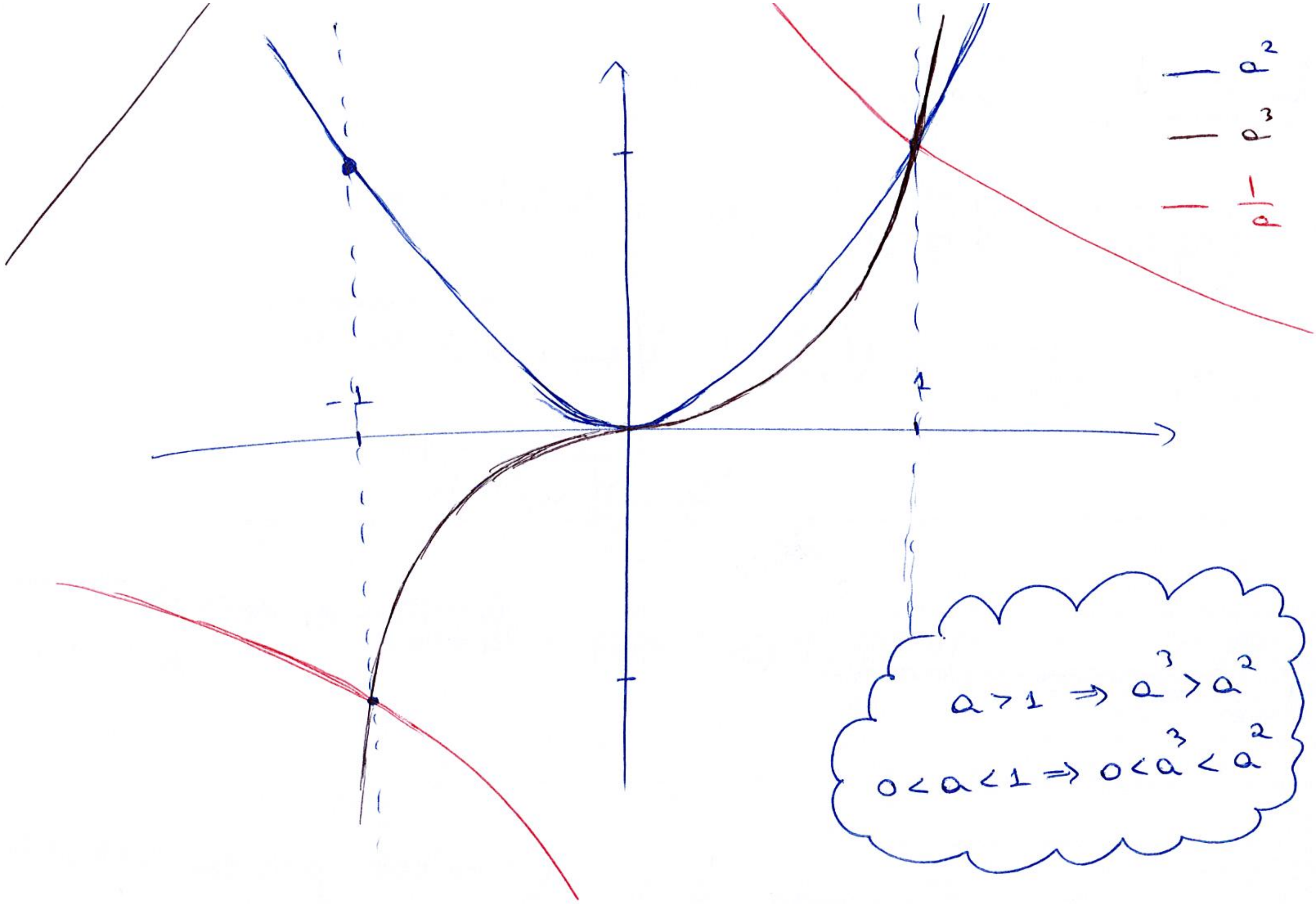
$$a > 1 \Rightarrow a^2 > a > 1 \Rightarrow a^3 > a^2 > 1 > \frac{1}{a},$$

c-à-d,

$$\frac{1}{a} < a^2 < a^3.$$

b)

$a \longmapsto f(a)$	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$a \longmapsto a^2$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$a \longmapsto a^3$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$a \longmapsto \frac{1}{a}$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	?	$\searrow$	1	$\searrow$	0



- <u>Sur $]-\infty, -1[$</u>

$$a^3 < \frac{1}{a} < a^2$$

- <u>Sur $]-1, 0[$</u>

$$\frac{1}{a} < a^3 < a^2$$

- <u>Sur $]0, 1[$</u>

$$a^3 < a^2 < \frac{1}{a}$$

- <u>Sur $]1, +\infty[$</u>

$$\frac{1}{a} < a^2 < a^3$$

EX. 10 On note que

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a + \sqrt{ab} + b$$

$$\Longrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b+\sqrt{ab}}$$

$$\geqslant \sqrt{a+b}.$$

On a l'égalité ssi $\sqrt{ab} = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

EX. 11 Suppose que f n'est pas constante.
Alors il existe $x < y$ tels que $f(x) \neq f(y)$.
Puisque f est croissante, on a $f(x) \leq f(y)$, donc
en fait

$$f(x) < f(y). \qquad (1)$$

Puisque $T > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x + nT > y$.
Comme f est croissante, on a donc

$$f(y) \leq f(x+nT). \qquad (2)$$

Puisque T est la période de f, on a aussi

$$f(x+nT) = f(x). \qquad (3)$$

Par (1), (2) et (3) on trouve que

$$f(x) = f(x+n T) \geq f(y) > f(x),$$

contradiction. Alors, f est constante.

<u>Ex. 12</u> Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 3-pér. et 5-pér., alors, pour n'importe quel $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+1) = f(x + 2\cdot 3 - 1\cdot 5)$$

$$= f(x + 2\cdot 3) \qquad \text{[car } f \text{ est 5-pér.]}$$

$$= f(x). \qquad \text{[car } f \text{ est 3-pér.]}$$

Par conséquent, f est 1-périodique.

En général, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est a-périodique et b-périodique alors f est $\operatorname{ppcd}(a,b)$-périodique. Dans l'exemple, $\operatorname{ppcd}(3,5) = 1$.

<u>Ex. 13</u> (i) Soit $f : x \mapsto \sin(3x)$. On sait que la période de $x \mapsto \sin(x)$ est 2π.

<u>Affirmation:</u> $\frac{2\pi}{3}$ est une période de f.

En effet,

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sin(3x + 2\pi) =$$

$$= \sin(3x) = f(x).$$

ii) Soit $g(x) = [\cos(\pi x)]^2 \sin(\pi x/2)$. Puisque $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(\frac{\pi x}{2})$ sont périodiques, $x \mapsto \cos(\pi x)$ et $x \mapsto (\pi x/2)$ sont aussi périodiques. Comme le produit de fonctions périodique est périodique on sait que g est périodique. Voyons que 4 est une période de g:

$$
\begin{aligned}
g(x+4) &= [\cos(\pi(x+4))]^2 \sin\left(\pi \frac{x+4}{2}\right) \\
&= [\cos(\pi x + 2 \cdot 2\pi)]^2 \sin\left(\frac{\pi x}{2} + 2\pi\right) \\
&= [\cos(\pi x)]^2 \sin(\pi x/2) \\
&= g(x).
\end{aligned}
$$

iii) Soit $h(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{3}\right) + \cos\left(\frac{x}{5}\right)$. Alors h est la somme de fonctions périodiques et est, donc, périodique. Une période de h est 60π.

$$
\begin{aligned}
h(x+60\pi) &= \cos\left(\frac{x+60\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+60\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{x+60\pi}{5}\right) \\
&= \cos\left(\frac{x}{2} + 15 \cdot 2\pi\right) + \cos\left(\frac{x}{3} + 10 \cdot 2\pi\right) + \cos\left(\frac{x}{5} + 6 \cdot 2\pi\right) \\
&= \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{3}\right) + \cos\left(\frac{x}{5}\right) \\
&= h(x).
\end{aligned}
$$

EX. 14 a) $x \xmapsto{f} \dfrac{x+x^7}{x^4-2x^5+3x^6}$.

Déjà, f n'est pas définie en 0. Si $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{x+x^7}{x^4-2x^5+3x^6} = \frac{1+x^6}{x^3-2x^4+3x^5} = \frac{1+x^6}{x^3(1-2x+3x^2)}.$$

On veut rétirer les x tels que $1-2x+3x^2=0$.
On résout cette éq. et on trouve qu'elle n'a pas de racines. Donc

$$D_f = \mathbb{R}^*.$$

b) On cherche les $x \in \mathbb{R}$ tels que (A)

$$x^3-2x^2-x+2=0.$$

Déjà, $x=1$ est racine de (A), en plus

$$(x-1)(x^2-x-2) = x^3-2x^2-x+2.$$

Pour l'éq. $x^2-x-2=0$ on trouve les racines

$x=2$ et $x=-1$.

Donc,

$$x^3-2x^2-x+2 = (x-1)(x+1)(x-2).$$

Par conséquent, l'ens. de déf. de $x \mapsto \dfrac{x^3-2x+1}{x^3-2x^2-x+2}$ est

$$\mathbb{R} \setminus \{1,-1,2\}.$$

On sait que $x=1$ est racine de x^3-2x+1, d'où

$$x^3-2x+1 = (x-1)(x^2+x-1) = (x-1)(x-1)(x+2).$$

En simplifiant on trouve $x \mapsto \dfrac{x^3-2x+1}{x^3-2x^2-x+2} = \dfrac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)(x^2-x-2)} = \dfrac{x^2+x-1}{x^2-x-2}$.

c) $x \overset{h}{\longmapsto} \dfrac{x^3+2x}{x^4+4x^2+4}$

On sait que

$$x^4+4x^2+4 = (x^2+2)^2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc, l'ens. de déf. de h est $\mathbb{R}$. En simplifiant:

$$h(x) = \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+4} = \frac{x\cancel{(x^2+2)}}{(x^2+2)^{\cancel{2}}} = \frac{x}{x^2+2}.$$

EX. 15

On a

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

On sait que cosinus est paire, alors

$$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Finalement, on sait que la période minimale de $x \mapsto \cos(x)$ est 2π. Par conséquent,

$$\cos\left(\pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

donc, l'ensemble d'antécédents de $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ par $x \mapsto \cos(x)$ est

$$\left\{\pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

EX. 16

a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-2}{x^3-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cancelto{0}{\frac{2}{x}}-\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}}{x-\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2+x}{3x^3+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancelto{0}{x^2}-\cancelto{0}{x}+1}{3\cancelto{0}{x^2}+2} = \frac{1}{2}.$$

c) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^2+x}{3x^3+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+1}{3x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cancelto{0}{\frac{1}{x}}+\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}}{3+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}} = \frac{1}{3}$$

d) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-5x+7}{3x+1} = \lim_{x\to-\infty} x\,\frac{2-\cancelto{0}{\frac{5}{x}}+\cancelto{0}{\frac{7}{x^2}}}{3+\cancelto{0}{\frac{1}{x}}} = -\infty$$

e) $$\lim_{t\to 3} \frac{t-3}{t^2-9} = \lim_{t\to 3} \frac{\cancel{t-3}}{(\cancel{t-3})(t+3)} = \lim_{t\to 3} \frac{1}{t+3} = \frac{1}{6}$$

f) $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x} =$$

$$\overset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-x^2}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\cancelto{0}{\frac{1}{x}}}+1} = \frac{1}{2}.$$

g) $\lim_{t \to 2} \frac{1}{t^2 - 2t} = \lim_{t \to 2} \frac{1}{t(t-2)}$

$\underbrace{}_{}$ ⚠ signe

$$\lim_{t \to 2^+} \frac{1}{t(t-2)} = +\infty,$$

$$\lim_{t \to 2^-} \frac{1}{t(t-2)} = -\infty.$$

h) $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} =$

$$= \lim_{x \to 1^+} (x-1)^{1-\frac{1}{2}} (x+1) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1}\,(x+1) = 0 \cdot 2 = 0.$$

i) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{x\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x+1)}{x-2} = -2$

EX. 17 a) On suppose que $x \mapsto f(x) + x$ est bornée sur $[a, +\infty[$. Alors il existe $M > 0$ tel que

$$|f(x) + x| \leq M, \forall x \in [a, +\infty[\qquad (\star)$$

$$\Rightarrow f(x) \leq M - x, \forall x \in [a, +\infty[.$$

Vu que $\lim_{x \to +\infty} (M - x) = -\infty$, on arrive que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

b) De (A) on trouve

$$-M \le f(x)+x \le M, \ \forall x \in [a,+\infty[.$$

Alors, si $x>0$,

$$-M \le f(x)+x \le M$$

$$\Rightarrow -M-x \le f(x) \le M-x$$

$$\Rightarrow -\frac{M}{x}-1 \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{M}{x}-1$$

Comme

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{M}{x}-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{M}{x}-1\right) = -1,$$

on obtient

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = -1.$$

EX. 18 a) Si $x=0$, l'éq. $x^{\frac{1}{3}}=3x$ est satisfaite.

Si $x\neq 0$, on a

$$x^{\frac{1}{3}}=3x \Rightarrow \frac{x}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{3} \Rightarrow x^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3} \Rightarrow |x|=\frac{1}{\sqrt{3^3}}.$$

$x=\frac{1}{\sqrt{3^3}}$ ou $x=\frac{-1}{\sqrt{3^3}}$

b) On cherche une solution $x>0$. Faisons $y=x^{\frac{1}{4}}$.

Alors $y^2=\sqrt{x}$. On résout

$$y^2-2y=1 \Leftrightarrow y^2-2y-1=0.$$

Cette équation admet deux racines :

$$1-\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad 1+\sqrt{2}.$$

Puisque $1-\sqrt{2}<0$, la seule racine qui résout notre problème est

$$y = 1+\sqrt{2},$$

d'où

$$x = y^4 = (1+\sqrt{2})^4.$$

EX. 19.1 a)

$$\begin{aligned}
\cos(2a) = \cos(a+a) &= \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) \\
&= (\cos(a))^2 - (\sin(a))^2 \\
&= (\cos(a))^2 + (\cos(a))^2 - (\cos(a))^2 - (\sin(a))^2 \\
&= 2(\cos(a))^2 - ((\cos(a))^2 + (\sin(a))^2) \\
&= 2(\cos(a))^2 - 1.
\end{aligned}$$

b) On pose $a = \arccos(x)$, d'où $\cos(a) = x$. Alors,

$$\begin{aligned}
\cos(2\arccos(x)) &= \cos(2a) \\
&= 2(\cos(a))^2 - 1 \\
&= 2x^2 - 1.
\end{aligned}$$

EX. 19.2 a) On a

$$\frac{1-(\tan(a))^2}{1+(\tan(a))^2} = \frac{1-\left(\frac{\sin(a)}{\cos(a)}\right)^2}{1+\left(\frac{\sin(a)}{\cos(a)}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2(a)-(\sin(a))^2}{\cancel{(\cos(a))^2}}}{\frac{(\cos(a))^2+(\sin(a))^2}{\cancel{(\cos(a))^2}}}$$

$$= \frac{\cos^2(a)-\sin(a)^2}{\underbrace{\cos(a)^2+\sin(a)^2}_{=1}}$$

$$= \cos(a).\cos(a)-\sin(a)\sin(a)$$

$$= \cos(a+a)$$

$$= \cos(2a).$$

b) Alors, si l'on pose $a = \arctan(x)$, on trouve

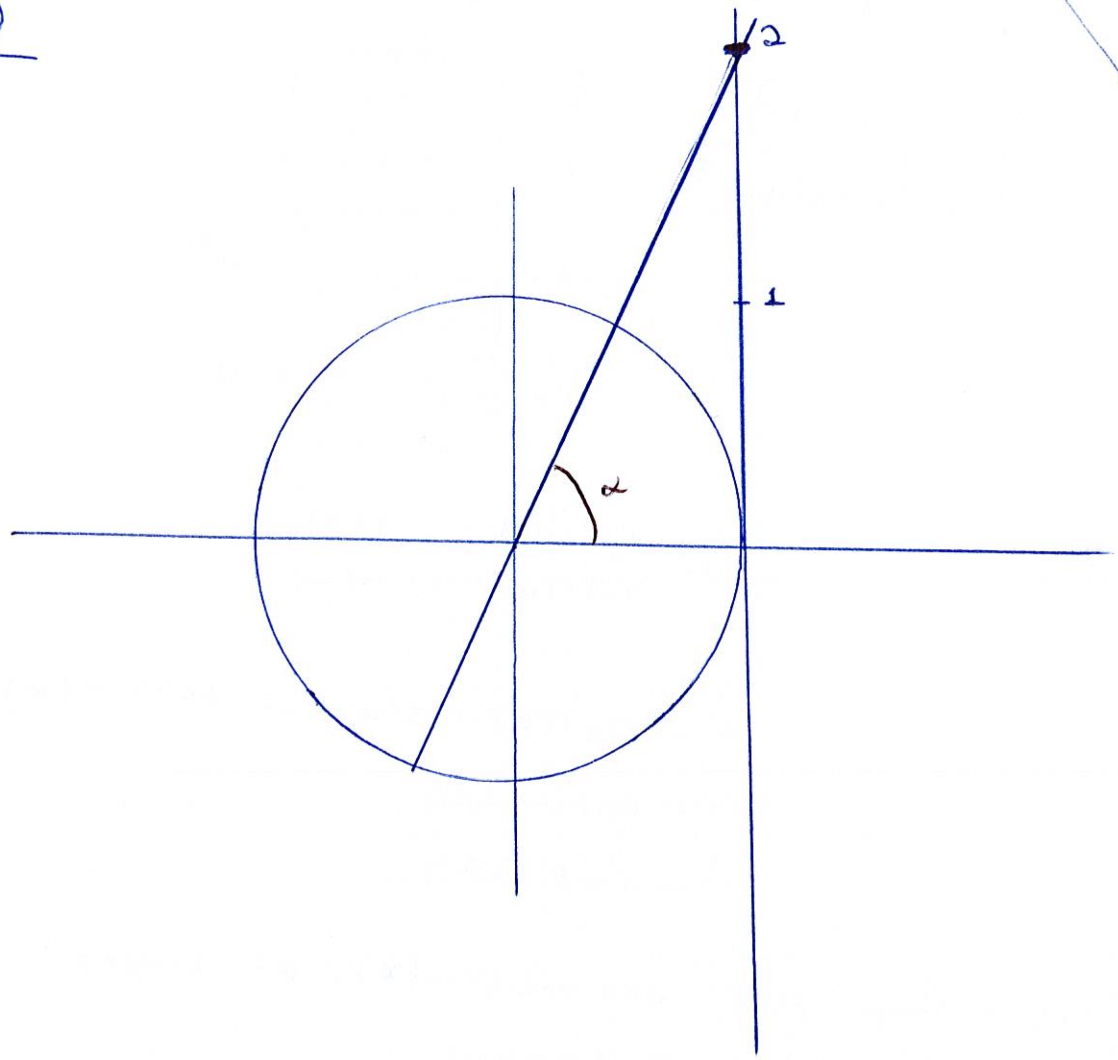
$$\cos(2\arctan(x)) = \cos(2a)$$

$$= \frac{1-(\tan(a))^2}{1+(\tan(a))^2}$$

$$= \frac{1-(\tan(\arctan(x)))^2}{1+(\tan(\arctan(x)))^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Ex. 20



L'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ se décompose :

$$\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] = \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{2\pi}{2}\right] \cup \left[-\frac{2\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$= \left[-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right] \cup \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Le réel $\boxed{\alpha = \arctan(2)}$ est l'unique antécédent de 2 par la fonction tangente. Toutes les solutions de $\tan x = 2$ sont

$$x = \alpha + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Puisque α est un point du premier quadrant, seulement le 1er et le 3ème quadrant contiennent une solution. Les intervalles $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ contiennent, donc, chacun une solution, càd, il y a 3 solutions dans $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $x_1 = \alpha$, $x_2 = \alpha + \pi$ et $x_3 = \alpha - \pi$.

#