Chap. 4 Equations différentielles.

L1S1 Portails Math-Info & Math-Physique
Analyse 1

2022-23

1 Introduction, vocabulaire

- Une équation différentielle (ED) est une relation entre une fonction et certaines de ses dérivées.
- L'équation différentielle est dite d'ordre n si l'ordre maximal des dérivées qui apparaissent dans cette relation est n.
- Une solution sur un intervalle I d'une équation différentielle (ED) d'ordre n est une fonction définie et n fois dérivable sur I qui vérifie cette relation.
- Résoudre une équation différentielle (sur I), c'est en déterminer l'ensemble des solutions (sur I).
- Deux équations différentielles sont dites équivalentes si elles ont les mêmes solutions.

Exemples. i) Une solution sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (d'ordre 1) $y' = y^2 + 1$ est une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall t \in I\,,\ f'(t) = f(t)^2 + 1$.

La fonction tan est une solution sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ de cette équation différentielle car $\forall t \in]-\pi/2, \pi/2[\,,\ \tan'(t) = (\tan t)^2 + 1$.

ii) Une solution sur un intervalle I de l'équation différentielle (d'ordre 2) $y'' - y' + y = t^2 + 1$ est une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $\forall t \in I\,,\ f''(t) - f'(t) + f(t) = t^2 + 1$.

Exercice. Vérifier que la fonction $t \mapsto t^2 + 2t + 1$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle .

iii) Une solution sur un intervalle I de l'équation différentielle (d'ordre 3) $(1-t)y^{(3)}y' - 4yy'' = 0$ est une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable telle que $\forall t \in I\,,\ (1-t)f^{(3)}(t)f'(t) - 4f(t)f''(t) = 0$.

2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Rappel. Soit u, une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors la fonction $t \mapsto e^{u(t)}$ est dérivable sur I et $(e^u)'(t) = u'(t)e^{u(t)}$.

En particulier, pour λ constante réelle, la fonction $g_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'_\lambda(t) = \lambda e^{\lambda t}$.

2.1 Définition. Exemples

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation différentielle de la forme

$$\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)\,, \qquad (1)$$

où α, β et γ sont trois fonctions définies sur un intervalle I.

On supposera dans la suite que $\forall t \in I\,,\ \alpha(t) \neq 0$. On peut alors diviser l'équation différentielle (1) par la fonction α et on trouve qu'elle est équivalente à l'équation différentielle $y' = a(t)y + b(t)\,,$ où $a = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ et $b = \dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Dans toute la suite de la partie 2, on s'intéresse à l'équation différentielle

$$y' = a(t)y + b(t)\,, \tag{2}$$

où a et b sont des fonctions définies et continues sur un intervalle I.

L'équation (2) est dite homogène lorsque $b = 0$.

Résoudre sur l'intervalle I l'équation différentielle (2), c'est déterminer l'ensemble des fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall t \in I\,,\ y'(t) = a(t)y(t) + b(t)\,.$$

On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (2).

Etant donné $t_0 \in I$, on peut s'intéresser aux solutions de (2) qui prennent une valeur particulière en t_0.

Résoudre sur I le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = c \end{cases}, \qquad (3)$$

c'est trouver toutes les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall t \in I\,,\ y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ et $y(t_0) = c$.

Exemple : cas où a est la fonction nulle. Supposons que $a(t) = 0$ pour tout $t \in I$. L'équation différentielle (2) s'écrit alors $y' = b(t)$, et les solutions sont les primitives sur I de la fonction b.

Par exemple, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = t^2$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \dfrac{t^3}{3} + C$, avec C constante réelle. Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ a une solution unique : c'est la fonction $t \mapsto \dfrac{t^3}{3} + 1$.

2.2 Résolution de l'équation homogène associée

L'équation homogène associée à (2) est l'équation différentielle obtenue en remplaçant b par 0. Il s'agit donc de l'équation différentielle

$$y' = a(t)y\,. \tag{4}$$

On notera $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de (4) sur I.

Remarquons que

- si y est une solution de (4) , alors pour toute constante réelle λ, la fonction λy est encore une solution de (4) . Le terme "homogène" est lié à cette propriété.
- soit A une primitive de la fonction a sur I et soit $f : t \mapsto e^{A(t)}$. On a, pour tout $t \in I$, $f'(t) = A'(t)e^{A(t)} = a(t)e^{A(t)} = a(t)f(t)$. Donc f est une solution de (4).

D'après ces deux remarques, pour toute constante réelle λ, la fonction $t \mapsto \lambda e^{A(t)}$ est une solution de (4). Le théorème suivant dit que toutes les solutions de (4) ont cette forme.

Théorème 2.2. Soit A une primitive de a sur I. L'ensemble des solutions de (4) est

$$\mathcal{S}_H = \left\{ y : t \mapsto \lambda e^{A(t)} \,;\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Remarques.

- La fonction a étant supposée continue sur I, elle possède bien des primitives sur I. Si on remplace A par une autre primitive $A + C$ de a, $\lambda e^{A(t)}$ se transforme en $\mu e^{A(t)}$, avec $\mu = \lambda e^{C}$.
- A chaque constante réelle λ correspond une solution : l'équation différentielle (4) a ainsi une infinité de solutions.

Preuve du théorème 2.2.

i) On a déjà vu que pour toute constante réelle λ, la fonction $t \mapsto \lambda e^{A(t)}$ est une solution de (4).

ii) Réciproquement, soit f une solution de (4). On doit montrer qu'il existe une constante λ telle que $\forall t \in I\,,\ f(t) = \lambda e^{A(t)}$. On définit une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(t)e^{-A(t)}$; on a donc $f(t) = g(t)e^{A(t)}$.

La fonction g est dérivable et

$$\begin{aligned} \forall t \in I\,,\ g'(t) &= f'(t)e^{-A(t)} + f(t)(-a(t)e^{-A(t)}) \\ &= (f'(t) - a(t)f(t))e^{-A(t)} \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

car par hypothèse, f est une solution de (4). Donc la fonction g est constante : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in I\,,\ g(t) = \lambda$. Finalement

$$\forall t \in I\,,\ f(t) = g(t)e^{A(t)} = \lambda e^{A(t)}\,.$$

Exemples.

- Les solutions (sur $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle $y' = 3y$ sont les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{3t}$, avec λ constante réelle.
- Les solutions (sur $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle $y' = -2y$ sont les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{-2t}$, avec λ constante réelle.

- Considérons l'équation différentielle $y' + ty = 0$. Cette équation s'écrit $y' = -ty$. On a ici $a(t) = -t$ et la fonction $t \mapsto -t^2/2$ est une primitive de a. Les solutions (sur $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle $y' + ty = 0$ sont donc les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{-t^2/2}$, avec λ constante réelle.
- La fonction ln étant une primitive sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto 1/t$, les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $y' = \dfrac{y}{t}$ sont les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{\ln t} = \lambda t$, avec λ constante réelle.
- La fonction $-\cos$ étant une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction sin, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = (\sin t)y$ sont les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{-\cos t}$, avec λ constante réelle.

2.3 Structure de l'ensemble des solutions

Théorème 2.3.1. (a) Si a et b sont deux fonctions continues sur l'intervalle I, l'équation différentielle

$$y' = a(t)y + b(t) \qquad (2)$$

a toujours des solutions sur I.

(b) Soit $y_0 \in \mathcal{S}$ une solution particulière de (2). Alors les solutions de (2) sont de la forme " y_0 + une solution de l'équation différentielle homogène (4)", c'est-à-dire que l'ensemble des solutions de (2) est

$$\mathcal{S} = \{y_0 + z\,;\ z \in \mathcal{S}_H\} = \{y : t \mapsto y_0(t) + \lambda e^{A(t)}\,;\ \lambda \in \mathbb{R}\},$$

où A est une primitive de a sur I.

Exemple. Considérons l'équation différentielle $y' = -ty + 2t$. On voit facilement que la fonction constante $y_0(t) = 2$ est une solution particulière. On a vu plus haut que les solutions de l'équation homogène associée $y' = -ty$ sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-t^2/2}$. Les solutions de $y' = -ty + 2t$ sont donc les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{-t^2/2} + 2$, avec λ constante réelle.

Preuve du théorème 2.3.1. Le point (a) sera montré en 2.4. Montrons le point (b).

i) Si $z \in \mathcal{S}_H$, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}(y_0 + z)'(t) = y_0'(t) + z'(t) &= (a(t)y_0(t) + b(t)) + a(t)z(t) \\ &= a(t)(y_0(t) + z(t)) + b(t)\,,\end{aligned}$$

donc $y_0 + z \in \mathcal{S}$.

ii) Réciproquement, si $y \in \mathcal{S}$, y et y_0 sont deux solutions de (2). On a donc

$$\begin{aligned}\forall t \in I\,,\; y'(t) - y_0'(t) &= (a(t)y(t) + b(t)) - (a(t)y_0(t) + b(t)) \\ &= a(t)(y(t) - y_0(t)).\end{aligned}$$

Donc $y - y_0$ est une solution de l'équation différentielle homogène (4). En posant $z = y - y_0$, on a $y = y_0 + z$, avec $z \in \mathcal{S}_H$.

Théorème 2.3.2. Soit $t_0 \in I$, $c \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = c \end{cases} \qquad (3)$$

a une solution unique.

Interprétation graphique. Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on appelle courbes intégrales de (2) les courbes représentatives des solutions de (2). D'après le théorème 2.3.2, pour tout point M_0 du plan d'abscisse dans I, il existe une unique courbe intégrale qui passe par M_0. En particulier, deux courbes intégrales distinctes ne peuvent pas s'intersecter.

Preuve du théorème 2.3.2. D'après le théorème 2.3.1, l'équation différentielle (2) a une solution y_0. De plus les solutions de (2) sont les fonctions $y_\lambda : I \to \mathbb{R}$ définies par $y_\lambda(t) = y_0(t) + \lambda e^{A(t)}$, où A est une primitive de a.

$$y_\lambda(t_0) = c \iff y_0(t_0) + \lambda e^{A(t_0)} = c \iff \lambda e^{A(t_0)} = c - y_0(t_0)$$

$e^{A(t_0)} \neq 0$ donc il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_\lambda(t_0) = c \qquad (\lambda = \dfrac{c - y_0(t_0)}{e^{A(t_0)}})$, c'est-à-dire : il existe une unique solution de (2) qui prend la valeur c en t_0.

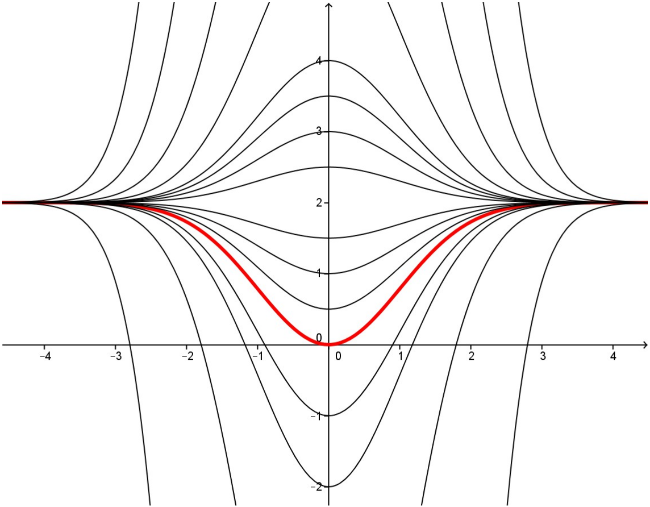
Exemple. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -ty + 2t \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

On a déjà vu que les solutions de (5) sur $\mathbb{R}$ sont les fonction $y_\lambda : t \mapsto 2 + \lambda e^{-t^2/2}$. On a

$$y_\lambda(0) = 0 \iff 2 + \lambda = 0 \iff \lambda = -2\,.$$

Le problème de Cauchy (5) a donc une solution unique : c'est la fonction $y_{(-2)} : t \mapsto 2 - 2e^{-t^2/2}$



Quelques courbes intégrales de l'équation différentielle $y' = -ty + 2t$. Ce sont les courbes représentatives de $t \mapsto 2 + \lambda e^{-t^2/2}$ pour quelques valeurs de λ. En rouge : l'unique courbe intégrale passant par le point O.

2.4 Recherche d'une solution particulière

On sait comment résoudre l'équation différentielle homogène associée à l'équation différentielle $y' = a(t)y + b(t) \quad (2)$.

Si on trouve une solution particulière de (2), le théorème 2.3.1 permet de donner toutes les solutions. Nous allons voir comment trouver une solution particulière.

a) Méthode d'ajustement des constantes. Cette méthode est utilisée lorsqu'on soupçonne l'existence d'une solution particulière d'une certaine forme. Voici quelques cas usuels.

- Si a est une fonction constante non nulle et b est une fonction polynomiale P, alors il existe une solution particulière polynomiale de même degré que P.
- Si a est une fonction constante et $b : t \mapsto ce^{rt}$ avec c et r constantes réelles, alors il existe une solution particulière y_0 de la forme $y_0(t) = c'e^{rt}$ si $r \neq a$, et de la forme $y_0(t) = c'te^{rt}$ si $r = a$, avec c' constante réelle.

- Plus généralement, si a est une fonction constante et $b : t \mapsto P(t)e^{rt}$ avec P fonction polynomiale, alors il existe une solution particulière y_0 de la forme $y_0(t) = Q(t)e^{rt}$, avec Q fonction polynomiale, et $\deg Q = \deg P$ si $r \neq a$, $\deg Q = \deg P + 1$ si $r = a$.
- Si a est une fonction constante et $b : t \mapsto c_1 \cos(\mu t) + c_2 \sin(\mu t)$, avec c_1, c_2 et μ constantes réelles, $\mu \neq 0$, alors il existe une solution particulière y_0 de la forme $y_0(t) = c_1' \cos(\mu t) + c_2' \sin(\mu t)$, avec c_1' et c_2' constantes réelles.

Exemple. On veut résoudre l'équation différentielle

$$y' = 2y + t^2 - 4\,. \tag{6}$$

L'équation différentielle homogène associée est $y' = 2y$, ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{2t}$.

On cherche à présent une solution particulière de (6) sous la forme $y_0(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$, où α, β, γ sont des constantes réelles.

y_0 est une solution de (6) $\iff \forall t \in \mathbb{R}\,,\ y_0'(t) - 2y_0(t) - t^2 + 4 = 0\,.$

On a
$$\begin{aligned} y_0'(t) - 2y_0 - t^2 + 4 &= (2\alpha t + \beta) - 2(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) - t^2 + 4 \\ &= (-2\alpha - 1)t^2 + (2\alpha - 2\beta)t + (\beta - 2\gamma + 4)\,. \end{aligned}$$

On obtient les conditions $\begin{cases} 2\alpha + 1 = 0 \\ 2\alpha - 2\beta = 0 \\ \beta - 2\gamma + 4 = 0 \end{cases}$, qui sont équivalentes à :

$\alpha = -1/2$, $\beta = \alpha = -1/2$ et $\gamma = (\beta + 4)/2 = 7/4$.

La fonction $y_0 : t \mapsto -\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t}{2} + \dfrac{7}{4}$ est une solution particulière de (6).

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{y : t \mapsto -\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{7}{4} + \lambda e^{2t}\,;\ \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$

b) Méthode générale : variation de la constante. Rappelons qu'il s'agit de trouver une solution particulière (sur un intervalle I) de l'équation différentielle

$$y' = a(t)y + b(t)\,, \qquad (2)$$

où les fonctions a et b sont continues sur I.

Soit A une primitive de a sur I; posons $z_0(t) = e^{A(t)}$. D'après le théorème 2.2, z_0 est une solution de l'équation homogène $y' = a(t)y \quad (4)$, plus précisément les solutions de (4) sont les fonctions λz_0, avec λ constante réelle.

La méthode de variation de la constante consiste à chercher une solution particulière de (2) sous la forme $y_0(t) = k(t)z_0(t)$, où k est une fonction.

Regardons à quelle condition sur la fonction k on obtient une solution de (2).

$$\begin{aligned}
\forall t \in I\,,\ y_0'(t) &= k(t)z_0'(t) + k'(t)z_0(t) \\
&= k(t)(a(t)z_0(t)) + k'(t)z_0(t) \quad \text{car } z_0 \text{ est une solution de (4)} \\
&= a(t)y_0(t) + k'(t)z_0(t)
\end{aligned}$$

On voit ainsi que, pour que y_0 soit une solution de (2), il suffit d'avoir $\forall t \in I\,,\ k'(t)z_0(t) = b(t)$.

$\forall t \in I\,,\ z_0(t) = e^{A(t)} \neq 0$, et la condition devient :

$$\forall t \in I\,,\ k'(t) = \frac{b(t)}{z_0(t)} = e^{-A(t)}b(t)\,.$$

Il faut donc calculer une primitive k_0 de la fonction $\ t \mapsto \dfrac{b(t)}{z_0(t)} = e^{-A(t)}b(t)$ sur l'intervalle I. Alors $y_0 : t \mapsto k_0(t)z_0(t) = k_0(t)e^{A(t)}$ est une solution particulière de (2). On trouve ainsi l'ensemble des solutions de (2) :

$$\mathcal{S} = \{y : t \mapsto k_0(t)z_0(t) + \lambda z_0(t)\ ;\ \lambda \text{ constante réelle}\}$$

Exemple 1. Considérons l'équation différentielle

$$y' = 3y + \cos(2t)e^{3t}\,. \tag{7}$$

i) On résout d'abord (sur $\mathbb{R}$) l'équation différentielle homogène associée $y' = 3y$. Les solutions sont les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{3t}$, avec λ constante réelle.

ii) On cherche ensuite une solution particulière de (7) sous la forme $y_0(t) = k(t)e^{3t}$. On obtient

$$\begin{aligned} y_0'(t) = 3y_0(t) + \cos(2t)e^{3t} \quad &\Longleftrightarrow \quad k'(t)e^{3t} + k(t).3e^{3t} = 3k(t)e^{3t} + \cos(2t)e^{3t} \\ &\Longleftrightarrow \quad k'(t)e^{3t} = \cos(2t)e^{3t} \\ &\Longleftrightarrow \quad k'(t) = \cos(2t)\,. \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(2t)}{2}$ étant une primitive de la fonction $t \mapsto \cos(2t)$, on trouve que $y_0 : t \mapsto \frac{\sin(2t)e^{3t}}{2}$ est une solution particulière de (7) .

iii) Conclusion : l'ensemble des solutions de (7) est

$$\mathcal{S} = \{y : t \mapsto \frac{\sin(2t)e^{3t}}{2} + \lambda e^{3t}\ ;\ \lambda \text{ constante réelle}\}$$

Exemple 2. On considère sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y' = \frac{2}{t}y + t\,. \tag{8}$$

i) On résout d'abord l'équation différentielle homogène associée $y' = \frac{2}{t}y$. La fonction $t \mapsto 2\ln t$ étant une primitive sur I de la fonction $t \mapsto \dfrac{2}{t}$, les solutions sont les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{2\ln t}$, c'est-à-dire les fonctions $y : t \mapsto \lambda t^2$, avec λ constante réelle.

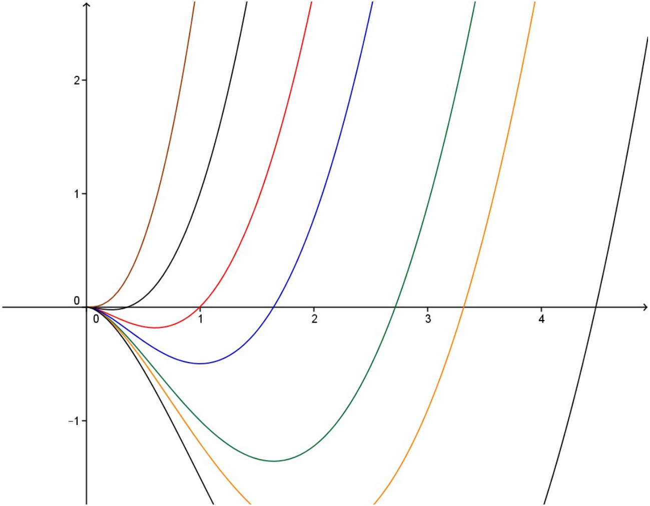
ii) On cherche ensuite une solution particulière de (8) sous la forme $y_0(t) = k(t)t^2$. On obtient, pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} y_0'(t) = \frac{2}{t}y_0(t) + t \quad &\iff \quad k'(t)t^2 + k(t).(2t) = \frac{2}{t}k(t)t^2 + t \\ &\iff \quad k'(t)t^2 + 2tk(t) = 2tk(t) + t \\ &\iff \quad k'(t) = \frac{1}{t}\,. \end{aligned}$$

On peut ainsi choisir $k(t) = \ln t$ et on trouve que $y_0 : t \mapsto (\ln t)t^2$ est une solution particulière de (8) .

iii) Conclusion : l'ensemble des solutions de (8) est

$$\mathcal{S} = \{y : t \mapsto (\ln t)t^2 + \lambda t^2 \;;\; \lambda \text{ constante réelle}\}\,.$$



Quelques courbes intégrales de l'équation différentielle $y' = \frac{2}{t}y + t$.

3 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

3.1 Définition

- Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est une équation différentielle linéaire de la forme

$$y'' + ay' + by = c(t)\,, \tag{9}$$

où a et b sont des constantes réelles et c est une fonction définie et continue sur un intervalle I.

- Résoudre (9) sur I, c'est en déterminer toutes les solutions, c'est-à-dire toutes les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall t \in I\,,\; y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)\,.$$

On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (9) .

- Soit $t_0 \in I$ et $k_0, k_1 \in \mathbb{R}$. Résoudre (sur I) le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c(t) \\ y(t_0) = k_0 \\ y'(t_0) = k_1 \end{cases} \tag{10}$$

c'est déterminer toutes les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in I\,,\; y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t) \qquad \text{et} \quad y(t_0) = k_0\,,\; y'(t_0) = k_1\,.$$

Remarque. Ce type d'équation différentielle peut apparaître en particulier en physique: circuits électriques, mouvements avec forces de rappel (de type ressort). Le principe fondamental de la dynamique (masse fois accélération=somme des forces) conduit à une équation différentielle ou un système différentiel d'ordre 2. Dans le cas des équations différentielles d'ordre 2, la condition initiale du problème de Cauchy fixe non seulement la valeur initiale $y(t_0)$ de la fonction mais aussi la valeur initiale $y'(t_0)$ de sa dérivée. Dans l'étude du mouvement d'un corps soumis à des forces, t désigne le temps et $y(t_0)$, $y'(t_0)$ correspondent respectivement à la position et la vitesse du corps à l'instant initial t_0.

3.2 Résolution de l'équation homogène associée

L'équation différentielle homogène associée à (9) est l'équation différentielle obtenue en remplaçant la fonction c par 0, c'est-à-dire :

$$y'' + ay' + by = 0\,. \tag{11}$$

On notera $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de (11).

Remarques. i) Si y est une solution de (11) , alors pour toute constante réelle λ, λy est aussi une solution de (11). Si y_1 et y_2 sont des solutions de (11) , alors leur somme $y_1 + y_2$ est aussi une solution de (11).

ii) Soit $r \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction $y : t \mapsto e^{rt}$. On a $y'(t) = re^{rt}$ et $y''(t) = r^2 e^{rt}$, ce qui donne

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = r^2 e^{rt} + are^{rt} + be^{rt} = (r^2 + ar + b)e^{rt}\,.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (t \mapsto e^{rt}) \text{ est une solution de } (11) \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}\,,\ (r^2 + ar + b)e^{rt} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad r^2 + ar + b = 0 \end{aligned}$$

Définition. On appelle polynôme caractéristique de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0 \quad (11)$ le polynôme

$$P(X) = X^2 + aX + b$$

D'après la remarque précédente, la fonction $t \mapsto e^{rt}$ est une solution de (11) si $P(r) = 0$, c'est-à-dire si r est une racine de P.

Rappel. Soit $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de P.

- Si $\Delta > 0$, P a deux racines réelles : $r_1 = \dfrac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-a - \sqrt{\Delta}}{2}$.
- Si $\Delta = 0$, P a une racine double réelle : $r_0 = \dfrac{-a}{2}$.
- Si $\Delta < 0$, P a deux racines complexes conjuguées : $r_1 = \dfrac{-a + i\sqrt{|\Delta|}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-a - i\sqrt{|\Delta|}}{2}$, avec $|\Delta| = -\Delta$.

. Théorème 3.2. Soit P le polynôme caractéristique de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0 \quad (11)$ et soit Δ le discriminant de P.

i) Si $\Delta > 0$, en notant r_1 et r_2 les deux racines distinctes réelles de P, l'ensemble des solutions de (11) est

$$\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}\,;\, \lambda, \mu \text{ constantes réelles}\}\,.$$

ii) Si $\Delta = 0$, en notant $r_0 \in \mathbb{R}$ la racine double de P, l'ensemble des solutions de (11) est

$$\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{r_0 t}\,;\, \lambda, \mu \text{ constantes réelles}\}\,.$$

iii) Si $\Delta < 0$, en notant $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ les deux racines complexes conjuguées distinctes de P, l'ensemble des solutions de (11) est

$$\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))e^{\alpha t}\,;\, \lambda, \mu \text{ constantes réelles}\}\,.$$

Exemples.

- Résolvons l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$. Le polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 + 2X + 1$. Le discriminant de P est nul, la racine double est -1. L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{-t} \,;\, \lambda, \mu \text{ constantes réelles}\}.$$

- Résolvons l'équation différentielle $y'' - 4y' = 0$. Le polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 - 4X$. P a deux racines réelles distinctes, $r_1 = 0$ et $r_2 = 4$. L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \lambda e^{0t} + \mu e^{4t} = \lambda + \mu e^{4t} \,;\, \lambda, \mu \text{ constantes réelles}\}.$$

- Résolvons l'équation différentielle $y'' - 2y' + 3y = 0$. Le polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 - 2X + 3$, de discriminant $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$. Les racines complexes de P sont $\dfrac{2 \pm i\sqrt{8}}{2} = 1 \pm i\sqrt{2}$. L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto (\lambda \cos(\sqrt{2}\,t) + \mu \sin(\sqrt{2}\,t))e^{t} \,;\, \lambda, \mu \text{ constantes réelles}\}.$$

3.3 Structure de l'ensemble des solutions

Théorème 3.3.1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $c : I \to \mathbb{R}$ continue, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c(t) \qquad (9)$, et l'équation différentielle homogène associée $y'' + ay' + by = 0 \qquad (11)$.

(i) L'équation différentielle (9) a des solutions sur I.

(ii) Soit y_0 une solution particulière de (9). Alors les solutions de (9) sont la somme de y_0 et d'une solution de l'équation homogène associée (11) :

$$\mathcal{S} = \{y_0 + z \,;\, z \in \mathcal{S}_H\}\,.$$

Remarque. La preuve du point (ii) du théorème 3.3.1 est analogue à celle du point (b) du théorème 2.3.1 pour les équations différentielles linéaires du premier ordre.

Exemple. On considère l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 3y = 2 \tag{12}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre , avec comme second membre c la fonction constante de valeur 2. Nous avons déjà vu que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée $y'' - 2y' + 3y = 0$ est :

$$\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto (\lambda \cos(\sqrt{2}\, t) + \mu \sin(\sqrt{2}\, t))e^t \,;\, \lambda, \mu \text{ constantes réelles}\}\,.$$

Par ailleurs on voit facilement que (12) admet (sur $\mathbb{R}$) une solution particulière constante, la fonction $y_0 : t \mapsto 2/3$. On en déduit que l'ensemble des solutions de (12) est :

$$\mathcal{S} = \{y : t \mapsto \frac{2}{3} + (\lambda \cos(\sqrt{2}\, t) + \mu \sin(\sqrt{2}\, t))e^t \,;\, \lambda, \mu \text{ constantes réelles}\}\,.$$

Théorème 3.3.2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $c : I \to \mathbb{R}$ continue, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $t_0 \in I$ et $k_0, k_1 \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c(t) \\ y(t_0) = k_0 \\ y'(t_0) = k_1 \end{cases}$$

a une solution unique.

Remarque. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c(t)$ a la structure

$$\mathcal{S} = \{y : t \in I \mapsto y_0(t) + \lambda z_1(t) + \mu z_2(t)\ ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}\ :$$

y_0 est une solution particulière, et z_1, z_2 sont les solutions de l'équation homogène associée qui sont données dans le théorème 3.2. Le théorme 3.3.2 dit qu'il y a un choix unique des constantes λ et μ pour lequel $y(t_0)$ et $y'(t_0)$ prennent les valeurs prescrites.

Exemple. Résolvons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' = 4t + 3 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \tag{13}$$

Nous avons résolu l'équation homogène associée $y'' - 4y' = 0$: son ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \lambda + \mu e^{4t} \ ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Nous verrons en 3.4 que (13) possède une solution particulière polynomiale de degré 2. On pose donc $y_0(t) = at^2 + bt + c$. On a

$$y_0''(t) - 4y_0'(t) = 2a - 4(2at + b) = -8at + (2a - 4b)\,.$$

Ainsi y_0 est une solution de l'équation différentielle si $\forall t \in \mathbb{R}\,,\ -8at + (2a - 4b) = 4t + 3$, c'est-à-dire si $-8a = 4$ et $2a - 4b = 3$. On obtient $a = -1/2$ et $b = (2a - 3)/4 = -1$; la valeur de c n'ayant pas d'importance ici, on pose $c = 0$: on a ainsi la solution particulière $y_0(t) = -\frac{1}{2}t^2 - t$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y' = 4t + 3$ est donc

$$\mathcal{S} = \{y : t \mapsto -\frac{1}{2}t^2 - t + \lambda + \mu e^{4t} \ ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Il reste à voir pour quel couple (λ, μ) les conditions $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ sont réalisées.
On a $y(0) = \lambda + \mu$ et $y'(t) = -t - 1 + 4\mu e^{4t}$, $y'(0) = -1 + 4\mu$. On obtient donc les conditions $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -1 + 4\mu = 2 \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} \mu = 3/4 \\ \lambda = -3/4 \end{cases}$.
Conclusion : l'unique solution du problème de Cauchy (13) est la fonction

$$y : t \mapsto -\frac{1}{2}t^2 - t - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}e^{4t}$$

3.4 Recherche d'une solution particulière

Comme dans le cas des équations différentielles linéaires du premier ordre, il existe une méthode de *variation des constantes* qui permet des déterminer des solutions particulières. Nous ne la présenterons pas ici, nous nous contenterons de présenter la méthode d'ajustement des constantes.

a) Principe de superposition. Ce principe repose sur le résultat suivant.

Proposition 3.4.1 Etant donnés des nombres réels a, b, α, β et deux fonctions $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}$ continues, si y_1 est une solution sur I de l'équation différentielle $(E1) \quad y'' + ay' + by = c_1(t)$ et y_2 est une solution sur I de l'équation différentielle $(E2) \quad y'' + ay' + by = c_2(t)$ alors la fonction $y_3 := \alpha y_1 + \beta y_2$ est une solution de l'équation différentielle $(E3) \quad y'' + ay' + by = \alpha c_1(t) + \beta c_2(t)$.

Preuve. On suppose que y_i est une solution de (Ei) $(i = 1, 2)$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall t \in I, \quad & y_3''(t) + ay_3'(t) + by_3(t) \\
&= (\alpha y_1''(t) + \beta y_2''(t)) + a(\alpha y_1'(t) + \beta y_2'(t)) + b(\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)) \\
&= \alpha(y_1''(t) + ay_1'(t) + by_1(t)) + \beta(y_2''(t) + ay_2'(t) + by_2(t)) \\
&= \alpha c_1(t) + \beta c_2(t)\,.
\end{aligned}$$

y_3 est donc une solution de $(E3)$.

Exemple. Considérons l'équation différentielle

$$y'' + 3y' - 2y = e^t - 2t + 3 \tag{14}$$

On voit que $y_1 : t \mapsto t$ est une solution particulière (sur $\mathbb{R}$) de $(E1)$ $y'' + 3y' - 2y = -2t + 3$ et que $y_2 : t \mapsto e^t$ est une solution particulière de $(E2)$ $y'' + 3y' - 2y = 2e^t$. On en déduit que $y_3 = y_1 + \dfrac{y_2}{2} : t \mapsto t + \dfrac{e^t}{2}$ est une solution particulière de (14).

b) Ajustement des constantes. On souhaite résoudre l'équation différentielle (9) $\quad y'' + ay' + by = c(t)$, où a, b sont des réels et c une fonction continue sur un intervalle I. Le résultat suivant nous dit que si $c(t)$ est d'une certaine forme, alors l'équation différentielle (9) a une solution particulière d'une forme similaire.

Proposition 3.4.2

1. On suppose que le second membre de l'équation différentielle
(9) $\quad y'' + ay' + by = c(t)$ est de la forme $c(t) = e^{\alpha t}P(t)$, où α est un réel et P une fonction polynomiale. Alors il existe une fonction polynomiale Q telle que la fonction $t \mapsto e^{\alpha t}Q(t)$ soit une solution particulière de (9).

2. On suppose que le second membre de l'équation différentielle (9) est de la forme $c(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)P_1(t) + \sin(\beta t)P_2(t))$, où α et β sont des réels, $\beta \neq 0$, et P_1, P_2 sont des fonctions polynomiales. Alors il existe deux fonctions polynomiales Q_1 et Q_2 telles que la fonction
$t \mapsto e^{\alpha t}(\cos(\beta t)Q_1(t) + \sin(\beta t)Q_2(t))$ soit une solution particulière de (9).

Précisions sur les degrés des fonctions polynomiales Q, Q_1, Q_2.

Cas 1. i) Si α n'est pas une racine du polynôme caractéristique $S(X) = X^2 + aX + b$ de (9) , alors Q a même degré que P.

ii) Si α est une racine simple de S, alors $d^o(Q) = d^o(P) + 1$, et on peut choisir le terme constant de Q égal à 0.

iii) Si α est une racine double de S, alors $d^o(Q) = d^o(P) + 2$, et on peut choisir le terme constant de Q et son terme de degré 1 égaux à 0.

Cas 2 : $c(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)P_1(t) + \sin(\beta t)P_2(t))$, $\beta \neq 0$.

i) Si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine (complexe) du polynôme caractéristique $S(X) = X^2 + aX + b$ de (9) , alors $d^o Q_1 \leq \max(d^o(P_1), d^o(P_2))$ et $d^o Q_2 \leq \max(d^o(P_1), d^o(P_2))$.

ii) Si $\alpha + i\beta$ est une racine de S, alors

$d^o Q_1 \leq \max(d^o(P_1), d^o(P_2)) + 1$, $d^o Q_2 \leq \max(d^o(P_1), d^o(P_2)) + 1$ et on peut choisir les termes constants de Q_1 et Q_2 égaux à 0.

Remarques.

i) Si le second membre $t \mapsto c(t) = P(t)$ est une fonction polynomiale, on est dans le cas 1. de la proposition 3.4.2, avec $\alpha = 0$. Donc si 0 n'est pas une racine du polynôme caractéristique, c'est-à-dire si $b \neq 0$, il existe une solution particulière polynomiale Q, avec $d^o(Q) = d^o(P)$.

ii) Dans le cas 2., si par exemple $P_2 = 0$, le second membre c est de la forme $c(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)P_1(t)$. On devra cependant bien chercher une solution particulière sous la forme $y_0(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)Q_1(t) + \sin(\beta t)Q_2(t))$: rien ne permet de dire que $Q_2 = 0$.

Une fois qu'on connaît la forme d'une solution particulière, il s'agit de déterminer le polynôme Q dans le cas 1, les polynômes Q_1 et Q_2 dans le cas 2. On connaît le degré ou le degré maximal du ou des polynômes cherchés. Par exemple dans le cas 1., si on sait que $d^o(Q) = 2$, on pose $Q(t) = dt^2 + et + f$, où d, e, f sont des réels, et on détermine les valeurs que doivent prendre les constantes d, e, f pour que $y_0 : t \mapsto e^{\alpha t}(dt^2 + et + f)$ soit une solution de l'équation différentielle . C'est la raison pour laquelle on parle de méthode d'ajustement des constantes.

Exemples.

- Considérons l'équation différentielle

$$y'' + 3y' - y = t^2 - t\,. \tag{15}$$

Cette équation différentielle est de la forme (9), avec $a = 3$, $b = -1$ et $c(t) = e^{0\cdot t}P(t)$, où P est une fonction polynomiale de degré 2; comme 0 n'est pas une racine du polynôme caractéristique $S(X) = X^2 + 3X - 1$, d'après la proposition 3.4.2, (15) a une solution particulière polynomiale de degré 2, $y_0 : t \mapsto dt^2 + et + f$. En injectant y_0 dans l'équation différentielle (15) et en regroupant les termes par degré, on trouve des équations que doivent vérifier les réels d, e, f, ce qui permet de déterminer ces réels.

- Considérons à présent l'équation différentielle

$$y'' + y = 2\cos t - \sin t \tag{16}$$

Cette équation différentielle est de la forme (9), avec $a = 0$, $b = 1$ et $c(t) = e^{0\cdot t}((\cos t)P_1(t) + (\sin t)P_2(t))$, où $P_1(t) = 2$ et $P_2(t) = -1$; P_1 et P_2 étant deux fonctions polynomiales de degré 0, on est dans le cas 2 de la proposition 3.4.2, avec $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Le polynôme caractéristique de (16) est $S(X) = X^2 + 1$; ici $\alpha + i\beta = i$ est une racine de S. On peut donc affirmer qu'il existe une solution particulière $y_0 : t \mapsto (\cos t)Q_1(t) + (\sin t)Q_2(t)$, où Q_1 et Q_2 sont des fonctions polynomiales de degré ≤ 1. De plus, on peut choisir les termes constants de Q_1 et Q_2 égaux à 0. On cherchera donc une solution particulière sous la forme $y_0 : t \mapsto (\cos t)d \cdot t + (\sin t)e \cdot t$, où d et e sont deux nombres réels à déterminer.

c) Exemple de résolution. On veut résoudre l' équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' - 2y' + 5y = te^{-t} \tag{17}$$

i) On résout d'abord l'équation différentielle homogène associée

$$y'' - 2y' + 5y = 0\,. \tag{18}$$

Le polynôme caractéristique de (17) et (18) est $S(X) = X^2 - 2X + 5$. Ce polynôme est de discriminant $\Delta = -16$; S a deux racines complexes conjuguées, $1 + 2i$ et $1 - 2i$. L'ensemble des solutions de (18) est donc

$$\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto e^t(\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t))\,;\ \lambda, \mu \text{ constantes réelles}\}\,.$$

ii) On cherche ensuite une solution particulière de (17). Comme -1 n'est pas une racine du polynôme caractéristique S, d'après la proposition 3.4.2, on peut chercher cette solution particulière sous la forme $y_0 : t \mapsto (at + b)e^{-t}$, où a et b sont des réels à déterminer.

On a

$$y_0'(t) = ae^{-t} - (at+b)e^{-t} = (-at+a-b)e^{-t}\,,$$

$$y_0''(t) = -ae^{-t} - (-at+a-b)e^{-t} = (at-2a+b)e^{-t}\,.$$

Donc

$$\begin{aligned} y_0''(t) - 2y_0'(t) + 5y_0(t) &= \Big[(at-2a+b) - 2(-at+a-b) + 5(at+b)\Big]e^{-t} \\ &= (8at-4a+8b)e^{-t}\,. \end{aligned}$$

Donc y_0 est une solution (sur $\mathbb{R}$) de (17) si $\begin{cases} 8a = 1 \\ -4a+8b = 0 \end{cases}$, ce qui est équivalent à $a = \dfrac{1}{8}$ et $b = \dfrac{1}{16}$.

Ainsi $y_0 : t \mapsto (\frac{t}{8} + \frac{1}{16})e^{-t}$ est une solution particulière de (17)

iii) Conclusion. L'ensemble des solutions de (17) est donc

$$\mathcal{S} = \{y : t \mapsto (\frac{t}{8} + \frac{1}{16})e^{-t} + (\lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t))e^{t}\,;\ \lambda, \mu \text{ constantes réelles}\}\,.$$