①

Analyse 2 - CC2 (2020-2021)

Exo. 1

1) On sait que

$$\frac{1}{n} \to 0 \text{ et } ((-1)^n)_n \text{ bornée} \Rightarrow \frac{(-1)^n}{n} \to 0$$

En plus, $x \mapsto \sin(x)$ est continue en 0, donc

$$\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \longrightarrow \sin(0) = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim u_n = \lim\left(-2 + \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right) = -2 + 0 = -2.$$

2) On sait que $|\sin x| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1 \Rightarrow -1-3 \leq -3+\sin(n) \leq 1-3$$
$$\Rightarrow -4 \leq -3+\sin(n) \leq -2.$$

En plus, $n^2 \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc,

$$-4 \leq -3+\sin(n) \leq -2 \Rightarrow -4n^2 \leq (-3+\sin(n))n^2 \leq -2n^2$$
$$\Rightarrow -4n^2 \leq -3n^2 + n^2\sin(n) \leq -2n^2.$$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} -4n^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^2 = -\infty$, on applique le Théorème des gendarmes et on trouve

$$\underset{\downarrow\atop -\infty}{-4n^2} \leq -3n^2 + n^2\sin(n) \leq \underset{\downarrow\atop -\infty}{-2n^2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(-3n^2+n^2\sin(n)\right) = -\infty.$$

3) On a

$$u_{6n+3} = \cos\left((6n+3)\frac{\pi}{3}\right) = \cos(2n\pi + \pi) = \cos(\pi) = -1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{6n+3} = -1$$

et

$$u_{6n} = \cos\left(6n\frac{\pi}{3}\right) = \cos(2n\pi) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{6n} = 1.$$

⇨

② Donc $(u_n)_n$ admet deux suites extraites avec des limites différentes. Par conséquent, $(u_n)_n$ est divergente.

Exo. 2

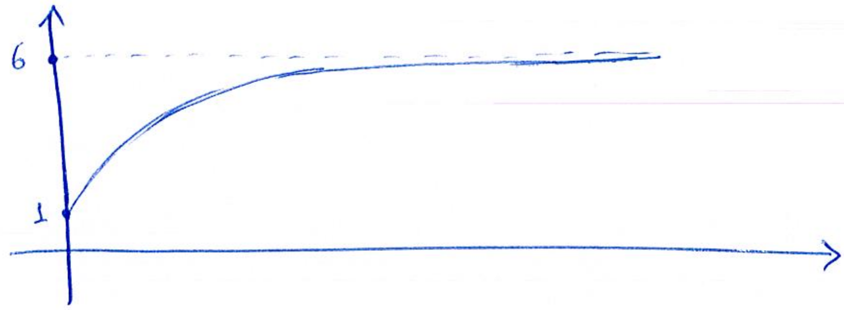
$$f : [0,9] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 6 - \frac{5}{x+1}.$$

1) On calcule

$$f'(x) = \left(-5(x+1)^{-1}\right)' = -5(-1)(x+1)^{-2} = \frac{5}{(x+1)^2} > 0$$

$\Rightarrow$ f strictement croissante.

En plus, $f(0) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 6$.



On définit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

2) On pose

$$P(n) : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 9.$$

Initialisation : On a $u_0 = 0$ et on calcule

$$u_1 = f(u_0) = f(0) = 1.$$

Donc

$$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 9 \Rightarrow P(0) \text{ est vraie.}$$

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie. Alors

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 9. \qquad (\star)$$

Puisque f est croissante, on applique f en $(\star)$ et on $\Longrightarrow$

3 trouve

$$0 \le u_n \le u_{n+1} \le 9 \Rightarrow f(0) \le f(u_n) \le f(u_{n+1}) \le f(9)$$

$$\Rightarrow 1 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le 6 - \frac{5}{10}$$

$$\Rightarrow 1 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le 6 - \frac{1}{2}.$$

Vu que $1 \geq 0$ et $6 - \frac{1}{2} \le 9$, on a

$$0 \le u_{n+1} \le u_{n+1} \le 9 \Rightarrow P(n+1) \text{ vraie.}$$

D'après le principe de récurrence,

$$0 \le u_n \le u_{n+1} \le 9, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La suite $(u_n)_n$ est donc monotone et bornée, ainsi, $(u_n)_n$ est convergente. Soit $\ell = \lim u_n$. On

3) Par définition, on a

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n+1} \Rightarrow \ell = 6 - \frac{5}{\ell+1}$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{6(\ell+1)-5}{\ell+1} \Rightarrow \ell(\ell+1) = 6\ell + 6 - 5$$

$$\Rightarrow \ell^2 + \ell - 6\ell - 1 = 0 \Rightarrow \ell^2 - 5\ell - 1 = 0.$$

On calcule

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 25 + 4 = 29$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} \quad \text{ou} \quad \ell = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}.$$

Vu que $\frac{5-\sqrt{29}}{2} < 0$ et que $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, on trouve que la seule possibilité est $\ell = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$. Donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{5+\sqrt{29}}{2}.$$

④

Exo. 3

1) On calcule

$$\frac{\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right)n^2 = \frac{2}{n}-\frac{1}{n^2} \longrightarrow 0.$$

Donc

$$\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2) On calcule

$$\frac{\frac{4}{n^4}+\frac{2}{n^5}}{\frac{1}{n^4}} = \left(\frac{4}{n^4}+\frac{2}{n^5}\right)n^4 = 4+\frac{2}{n} \longrightarrow 4$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{\frac{4}{n^4}+\frac{2}{n^5}}{\frac{1}{n^4}}\right)_n \text{ est bornée}$$

Donc

$$\frac{4}{n^4}+\frac{2}{n^5} = O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

3) On voit que

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4} \longrightarrow 0 \Rightarrow 1-\cos\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right) \sim \frac{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right)^2}{2}$$

et

$$\frac{4}{n^4}+\frac{2}{n^5} \longrightarrow 0 \Rightarrow \exp\left(\frac{4}{n^4}+\frac{2}{n^5}\right)-1 \sim \frac{4}{n^4}+\frac{2}{n^5}.$$

$\Rightarrow$

5) En plus

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \frac{4}{n^4}+\frac{2}{n^5} \sim \frac{4}{n^4}.$$

En effet,

$$\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right).n^2 = 1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2} \to 1$$

et

$$\frac{\frac{4}{n^4}+\frac{2}{n^5}}{\frac{4}{n^4}} = \left(\frac{4}{n^4}+\frac{2}{n^5}\right)\frac{n^4}{4} = 1+\frac{1}{2n} \to 1.$$

Par conséquent,

$$\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right)}{\exp\left(\frac{4}{n^4}+\frac{2}{n^5}\right)-1} \sim \frac{\frac{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right)^2}{2}}{\frac{4}{n^4}+\frac{2}{n^5}}$$

$$\sim \frac{\frac{\left(\frac{1}{n^2}\right)^2}{2}}{\frac{4}{n^4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2n^4}}{\frac{4}{n^4}} = \frac{1}{8}.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right)}{\exp\left(\frac{4}{n^4}+\frac{2}{n^5}\right)-1} = \frac{1}{8}.$$

4) On a

$$\frac{\ln(n^2+n)}{2\ln(n)} = \frac{\ln(n^2(1+\frac{1}{n}))}{\ln(n^2)} = \frac{\ln(n^2)+\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n^2)} = 1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n^2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

$\ln(1)=0$

Donc $\ln(n^2+n) \sim 2\ln(n)$.

$\Rightarrow$