CONTROLE CONTINU 3 -2018-19- Analyse 2.
Eléments de correction.

Exercice 1. Soit la suite définie par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n}$.
1) Calculer u_1 à l'aide de u_0, ainsi que u_{n+2} à l'aide de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2) En déduire les suites extraites des termes de rang pair et impair à l'aide de u_0.
3) u_0 étant strictement positif, pour quelle(s) valeur(s) de u_0, (u_n) converge ? Justifier.

Exercice 2. On considère la suite de terme général $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) + \dfrac{2}{n}$.
1) Construire trois suites extraites de (u_n) : une qui converge vers 0, une qui converge vers 1 et une qui converge vers -1.
2) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Exercice 1

Eléments de correction :

1) $u_1 = \dfrac{2}{u_0}$, $u_{n+2} = u_n$.

2) On en déduit $u_{2(n+1)} = u_{2n} = u_0$ et $u_{2(n+1)+1} = u_{2n+1} = u_1$.

3) Si $u_0 > 0$, $u_0 \neq u_1$ alors (u_n) admet 2 valeurs d'adhérence distinctes donc diverge.

Si $u_0 = u_1$ ($\Longleftrightarrow u_0^2 = 2$) alors la suite (u_n) est constante (égale à u_0) donc converge. u_0 étant strictement positif on en déduit que (u_n) converge vers $\sqrt{2}$ pour $u_0 = \sqrt{2}$.

Remarque Pour $u_0 = -\sqrt{2}$ (u_n) est constante, égale à $-\sqrt{2}$, et converge donc vers $-\sqrt{2}$.

Exercice 2

Eléments de correction :

1) $u_{2n+1} = \dfrac{2}{2n+1}$ donc la suite extraite des termes de rang impair tend vers 0.

$u_{2n} = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$, on en conclut que la suite extraite (u_{4n}) converge vers 1 et la suite extraite (u_{4n+2}) converge vers -1.

2) On en déduit que la suite (u_n) diverge car si elle convergeait toute suite extraite convergerait vers la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

1) On rappelle que si $u_n \to 0$ alors $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.

1-1) Donner un équivalent de $n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1)$.

Exercice 3

1) On rappelle que si $u_n \to 0$ alors $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.

1-1) Donner un équivalent de $n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1)$.

$\frac{2}{n} \to 0$ donc $e^{\frac{2}{n}} - 1 \sim \frac{2}{n}$. On en déduit par la propriété de la multiplication d' équivalents :

$$n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1) \sim n^3 \frac{2}{n} \sim 2n^2 \,.$$

Exercice 3

1) On rappelle que si $u_n \to 0$ alors $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.

1-1) Donner un équivalent de $n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1)$.

$\frac{2}{n} \to 0$ donc $e^{\frac{2}{n}} - 1 \sim \frac{2}{n}$. On en déduit par la propriété de la multiplication d' équivalents :

$$n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1) \sim n^3 \frac{2}{n} \sim 2n^2 .$$

1-2) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1)}{1 + n^2}$.

Exercice 3

1) On rappelle que si $u_n \to 0$ alors $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.

1-1) Donner un équivalent de $n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1)$.

$\frac{2}{n} \to 0$ donc $e^{\frac{2}{n}} - 1 \sim \frac{2}{n}$. On en déduit par la propriété de la multiplication d' équivalents :

$$n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1) \sim n^3\frac{2}{n} \sim 2n^2 .$$

1-2) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1)}{1 + n^2}$.

Pour le dénominateur on connaît l'équivalent usuel :

Exercice 3

1) On rappelle que si $u_n \to 0$ alors $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.

1-1) Donner un équivalent de $n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1)$.

$\frac{2}{n} \to 0$ donc $e^{\frac{2}{n}} - 1 \sim \frac{2}{n}$. On en déduit par la propriété de la multiplication d' équivalents :

$$n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1) \sim n^3 \frac{2}{n} \sim 2n^2 \, .$$

1-2) En déduire $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1)}{1 + n^2}$.

Pour le dénominateur on connaît l'équivalent usuel :$1 + n^2 \sim n^2$

.

Exercice 3

1) On rappelle que si $u_n \to 0$ alors $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.

1-1) Donner un équivalent de $n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1)$.
$\frac{2}{n} \to 0$ donc $e^{\frac{2}{n}} - 1 \sim \frac{2}{n}$. On en déduit par la propriété de la multiplication d' équivalents :

$$n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1) \sim n^3 \frac{2}{n} \sim 2n^2 \,.$$

1-2) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1)}{1 + n^2}$.
Pour le dénominateur on connaît l'équivalent usuel :$1 + n^2 \sim n^2$ .Comme pour $n \geq 1$, n^2 ne s'annule pas, on en déduit, par

propriété de l'inverse d'équivalents :

Exercice 3

1) On rappelle que si $u_n \to 0$ alors $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.

1-1) Donner un équivalent de $n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1)$.

$\frac{2}{n} \to 0$ donc $e^{\frac{2}{n}} - 1 \sim \frac{2}{n}$. On en déduit par la propriété de la multiplication d' équivalents :

$$n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1) \sim n^3 \frac{2}{n} \sim 2n^2 \,.$$

1-2) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1)}{1 + n^2}$.

Pour le dénominateur on connaît l'équivalent usuel :$1 + n^2 \sim n^2$ .Comme pour $n \geq 1$, n^2 ne s'annule pas, on en déduit, par propriété de l'inverse d'équivalents :$\dfrac{n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1)}{1 + n^2} \sim \dfrac{2n^2}{n^2} \sim 2$.

Exercice 3

1) On rappelle que si $u_n \to 0$ alors $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.

1-1) Donner un équivalent de $n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1)$.

$\frac{2}{n} \to 0$ donc $e^{\frac{2}{n}} - 1 \sim \frac{2}{n}$. On en déduit par la propriété de la multiplication d' équivalents :

$$n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1) \sim n^3 \frac{2}{n} \sim 2n^2 .$$

1-2) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1)}{1 + n^2}$.

Pour le dénominateur on connaît l'équivalent usuel :$1 + n^2 \sim n^2$ .Comme pour $n \geq 1$, n^2 ne s'annule pas, on en déduit, par propriété de l'inverse d'équivalents :$\dfrac{n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1)}{1 + n^2} \sim \dfrac{2n^2}{n^2} \sim 2$.

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n^3(e^{\frac{2}{n}} - 1)}{1 + n^2} = 2$, par propriété des équivalents.

2) Soit (u_n) une suite satisfaisant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{\ln n}{n^2}\right) n^3 \leq u_n \leq \frac{3}{1 + e^{-n}} n^3 .$$

2-1) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq 1 + \dfrac{\ln n}{n^2}$ et $\dfrac{3}{1 + e^{-n}} \leq 3.$

2) Soit (u_n) une suite satisfaisant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{\ln n}{n^2}\right) n^3 \leq u_n \leq \frac{3}{1+e^{-n}} n^3 .$$

2-1) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq 1 + \dfrac{\ln n}{n^2}$ et $\dfrac{3}{1+e^{-n}} \leq 3.$

$n \geq 1$ donc $\dfrac{\ln n}{n^2} \geq 0.$

2) Soit (u_n) une suite satisfaisant :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \dfrac{\ln n}{n^2}\right) n^3 \leq u_n \leq \dfrac{3}{1+e^{-n}} n^3$.

2-1) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq 1 + \dfrac{\ln n}{n^2}$ et $\dfrac{3}{1+e^{-n}} \leq 3.$

$n \geq 1$ donc $\dfrac{\ln n}{n^2} \geq 0.$

De plus $e^{-n} > 0$ donc $1 + e^{-n} > 1$ et $\dfrac{1}{1+e^{-n}} \leq 1.$

2) Soit (u_n) une suite satisfaisant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{\ln n}{n^2}\right) n^3 \leq u_n \leq \frac{3}{1+e^{-n}} n^3 .$$

2-1) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq 1 + \dfrac{\ln n}{n^2}$ et $\dfrac{3}{1+e^{-n}} \leq 3$.

$n \geq 1$ donc $\dfrac{\ln n}{n^2} \geq 0$.

De plus $e^{-n} > 0$ donc $1 + e^{-n} > 1$ et $\dfrac{1}{1+e^{-n}} \leq 1$.

En déduire que $u_n = \mathcal{O}(n^3)$.

2) Soit (u_n) une suite satisfaisant :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{\ln n}{n^2}\right) n^3 \leq u_n \leq \frac{3}{1+e^{-n}} n^3$.

2-1) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq 1 + \frac{\ln n}{n^2}$ et $\frac{3}{1+e^{-n}} \leq 3$.

$n \geq 1$ donc $\frac{\ln n}{n^2} \geq 0$.

De plus $e^{-n} > 0$ donc $1 + e^{-n} > 1$ et $\frac{1}{1+e^{-n}} \leq 1$.

En déduire que $u_n = \mathcal{O}(n^3)$.

On a ainsi pour $n \geq 1$,

$$1 \leq \frac{u_n}{n^3} \leq 3 \,,$$

cela signifie que la suite de terme général $\frac{u_n}{n^3}$, est bornée. D'où le résultat.

2-2) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{3}{1+e^{-n}} n^3$.

Montrer que $v_n \sim 3n^3$.

2-2) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{3}{1+e^{-n}} n^3$.

Montrer que $v_n \sim 3n^3$.

$\lim e^{-n} = 0$ donc $\lim \dfrac{3}{1+e^{-n}} = 3$, ainsi par multiplication $v_n \sim 3n^3$.

2-2) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{3}{1+e^{-n}} n^3$.

Montrer que $v_n \sim 3n^3$.

$\lim e^{-n} = 0$ donc $\lim \dfrac{3}{1+e^{-n}} = 3$, ainsi par multiplication $v_n \sim 3n^3$.

2-3) Montrer que $\dfrac{\ln n}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2-2) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{3}{1+e^{-n}} n^3$.

Montrer que $v_n \sim 3n^3$.

$\lim e^{-n} = 0$ donc $\lim \dfrac{3}{1+e^{-n}} = 3$, ainsi par multiplication $v_n \sim 3n^3$.

2-3) Montrer que $\dfrac{\ln n}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On sait, par croissance comparée, que $\lim \dfrac{\ln n}{n} = 0$. Donc $\lim \dfrac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 0$, c'est-à-dire $\dfrac{\ln n}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.