Analyse 2

Correction TD 4

2020-2021

Rappel : définition d'une suite négligeable devant une autre

La suite (a_n) est **négligeable** devant la suite (b_n) (ou (b_n) est **prépondérante** devant (a_n)), ce que l'on écrit $a_n = o(b_n)$, si

- Il existe une suite (ε_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$,
- Pour tout n, $a_n = \varepsilon_n b_n$ à partir d'un certain rang.

Rappel : définition d'une suite dominée une autre

La suite (a_n) est **dominée** par la suite (b_n) (ou (b_n) **domine** (a_n)), ce que l'on écrit $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, si

- Il existe une suite (M_n) bornée,
- Pour tout n, $a_n = M_n b_n$ à partir d'un certain rang.

Ou bien, de façon équivalente,

- il existe $M \geq 0$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand,

$$|a_n| \leq M|b_n|$$

Exercice 1 :

Vérifier les assertions suivantes :

$$\frac{1}{n} = o(1), \quad \frac{\ln^{10}(n)}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \frac{2n+3}{n^2-5} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \quad \frac{\cos(n\pi/3)}{n} = \mathcal{O}(1).$$

Remarque : $u_n = o(1) \Leftrightarrow u_n = \varepsilon_n \times 1$ avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc on a $\frac{1}{n} = o(1)$.
- $\frac{\ln^{10}(n)}{n^3} = \frac{\ln^{10}(n)}{n} \times \frac{1}{n^2} = \varepsilon_n \times \frac{1}{n^2}$ si on pose $\varepsilon_n = \frac{\ln^{10}(n)}{n}$.
  Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln^{10}(n)}{n} = 0$ (résultat de cours) , donc $\frac{\ln^{10}(n)}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- $\frac{2n+3}{n^2-5} = \frac{n}{n^2}\left[\frac{2+\frac{3}{n}}{1-\frac{5}{n^2}}\right] = \left[\frac{2+\frac{3}{n}}{1-\frac{5}{n^2}}\right] \times \frac{1}{n} = M_n \times \frac{1}{n}$
  avec $M_n = \left[\frac{2+\frac{3}{n}}{1-\frac{5}{n^2}}\right]$.
  Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 2$, la suite $(M_n)_n$ est convergente, et d'après un résultat du cours, toute suite convergente est bornée, donc $\frac{2n+3}{n^2-5} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

- $\left|\dfrac{\cos(n\pi/3)}{n}\right| \leq \dfrac{1}{n} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\dfrac{\cos(n\pi/3)}{n} = \mathcal{O}(1)$.

Exercice 2 :

Vérifier les assertions suivantes :

$$\frac{2n+3}{n^3-5} = o(1), \quad \frac{\cos(n\pi/3)}{n} = o(1), \quad \frac{1}{n} = \mathcal{O}(1), \quad \frac{2n+3}{n-5} = \mathcal{O}(1).$$

- $\dfrac{2n+3}{n^3-5} = \dfrac{n}{n^3}\left[\dfrac{2+\frac{3}{n}}{1-\frac{5}{n^3}}\right] = M_n \times \dfrac{1}{n^2}$, où l'on pose $M_n = \frac{2+\frac{3}{n}}{1-\frac{5}{n^3}}$. Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 2$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{n^3-5} = 0$, par conséquent on a que $\dfrac{2n+3}{n^3-5} = o(1)$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n\pi/3)}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n\pi/3) \times \dfrac{1}{n} = 0$ comme produit d'une suite bornée et d'une suite qui converge vers 0 , donc $\dfrac{\cos(n\pi/3)}{n} = o(1)$.
- $\left|\dfrac{1}{n}\right| \leq 1$ donc $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est bornée et $\dfrac{1}{n} = \mathcal{O}(1)$.
- $\dfrac{2n+3}{n-5} = \dfrac{n}{n}\left[\dfrac{2+\frac{3}{n}}{1-\frac{5}{n}}\right] = \left[\dfrac{2+\frac{3}{n}}{1-\frac{5}{n}}\right] := M_n \to 2$ qd $n \to +\infty$, donc est bornée (car convergente) , et on a $\dfrac{2n+3}{n-5} = \mathcal{O}(1)$.

Exercice 3 :

Déterminer un équivalent simple pour les suites ci-après :

1) $\dfrac{n^6+4n^2-6}{7n^4-3n^2+n}$; 2) $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$; 3) $\dfrac{n^3-\sqrt{n^2+1}}{\ln n-2n^2}$; 4) $\dfrac{n^3-\sqrt{n^2+1}}{\ln n-2n^2}$;

- 1) On note $u_n=\frac{n^6+4n^2-6}{7n^4-3n^2+n}$. on a $n^6+4n^2-6\sim n^6$ car

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^6+4n^2-6}{n^6}=\lim_{n\to+\infty}1+\frac{4}{n^2}-\frac{6}{n^6}=1,$$

et $7n^4-3n^2+n\sim 7n^4$ car

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{7n^4-3n^2+n}{7n^4}=\lim_{n\to+\infty}1-\frac{3}{7n^2}+\frac{1}{7n^3}=1,$$

donc

$$\frac{n^6+4n^2-6}{7n^4-3n^2+n}\sim\frac{n^6}{7n^4}=\frac{n^2}{7},$$

quand $n\to+\infty$.

- 2) On note $u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

rappel : si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ alors $\sin a_n \sim a_n$.

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

De plus $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$.

d'où

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \quad n \to +\infty.$$

- On note $u_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2}$.

  on a $n^3 - \sqrt{n^2+1} \sim n^3$, car

$$\frac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{n^3} = 1 - \sqrt{\frac{n^2+1}{n^6}} = 1 - \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

  et $\ln n - 2n^2 \sim -2n^2$

  En effet, par croissance comparée : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$.

$$\text{D'où} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n - 2n^2}{-2n^2} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n^2} = 1$$

  donc

$$u_n \sim \frac{n^3}{-2n^2} = -\frac{n}{2} \quad n \to +\infty.$$

Exercice 4 :

Déterminer un équivalent simple pour chacune des suites ci-après :

$$1)\ (n+1)^{1/3}-n^{1/3};\quad 2)\ \left(1+\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)\right)^{2/3}-1.$$

- 1) On note $u_n=(n+1)^{1/3}-n^{1/3}$.

  On a $(n+1)^{1/3}-n^{1/3}=n^{1/3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3}-n^{1/3}=n^{1/3}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3}-1\right]$

  rappel : si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$ alors $(1+a_n)^{\alpha}-1\sim \alpha a_n$

  comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ alors $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3}-1\sim\frac{1}{3n}$ donc

$$u_n\sim\frac{n^{1/3}}{3n}=\frac{1}{3n^{2/3}},\quad n\to+\infty.$$

- 2) On note $u_n = (1+v_n)^{2/3} - 1$ où $v_n = \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)$.

  On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{n} = \sin 0 = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$$

  d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et donc $u_n = (1+v_n)^{2/3} - 1 \sim \frac{2}{3}v_n$.

  D'autre part,

  rappel : si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ alors $\ln(1+a_n) \sim a_n$,

  comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$ alors $v_n = \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) \sim \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$,

  Donc $v_n \sim \frac{1}{n}$ et donc $u_n \sim \frac{2}{3n}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5 :

A l'aide des équivalents, déterminer la limite de la suite de terme général :

$$1)\ (n^2+n)\sqrt{\sin\frac{\pi}{2n^4}}\ ; \quad 2)\ n^2\tan\left(\sqrt{\cos\frac{1}{n}}-1\right)\ ;$$

- 1) On note $u_n = (n^2+n)\sqrt{\sin\frac{\pi}{2n^4}}$.

  On a

  $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2n^4}=0 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2n^4}\sim\frac{\pi}{2n^4} \Rightarrow \sqrt{\sin\frac{\pi}{2n^4}}\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n^4}}=\frac{1}{n^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

  .

  De plus $n^2+n\sim n^2$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}1+\frac{1}{n}=1$.

  Donc

  $$u_n=\underbrace{(n^2+n)}_{\sim n^2}\underbrace{\sqrt{\sin\frac{\pi}{2n^4}}}_{\sim\frac{1}{n^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\sim n^2\times\frac{1}{n^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

  et par conséquent

  $$\lim_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

- Notons $u_n = n^2 \tan v_n$ où $v_n = \sqrt{\cos \frac{1}{n}} - 1$.

  Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos \frac{1}{n} = \cos 0 = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$,

  rappel : si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ alors $\tan(a_n) \sim a_n$,

  Par conséquent
  $$u_n = n^2 \tan v_n \sim n^2 v_n$$
  . D'autre part,
  $$v_n = \sqrt{\cos \frac{1}{n}} - 1 = \sqrt{\left[\cos \frac{1}{n} - 1\right] + 1} - 1 = (w_n + 1)^{1/2} - 1 \sim \frac{1}{2} w_n$$
  car $w_n = \cos \frac{1}{n} - 1$ vérifie $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

  De plus
  $$w_n = \cos \frac{1}{n} - 1 \sim -\frac{1}{2n^2},$$
  donc
  $$v_n \sim \frac{1}{2} w_n \sim -\frac{1}{4n^2},$$
  et donc
  $$u_n = n^2 \tan v_n \sim n^2 v_n \sim -\frac{1}{4}.$$
  D'où
  $$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\frac{1}{4}.$$

Exercice 6 :

A l'aide des équivalents, déterminer la limite de la suite de terme général :

$$1)\ \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad ; \quad 2)\ \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right)}{\sqrt{\exp(\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2})-1}}.$$

- 1) On note $u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \exp v_n$ où $v_n = n^2 \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$.

  Ecrivons $\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\left[\cos\frac{1}{n}-1\right]+1\right)$

  Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\frac{1}{n} - 1 = \cos 0 - 1 = 0$ alors

$$\ln\left(\left[\cos\frac{1}{n}-1\right]+1\right) \sim \cos\frac{1}{n} - 1.$$

  <u>rappel</u> : si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ alors $\cos(a_n) - 1 \sim -\frac{a_n^2}{2}$

  Donc

$$\cos\frac{1}{n} - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$$

Par conséquent, $\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$.
Donc

$$v_n = n^2 \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{n^2}{2n^2} = -\frac{1}{2},$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\frac{1}{2}$.
D'où

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \exp v_n = \exp(-1/2).$$

- 2) Notons $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right)}{\sqrt{\exp\left(\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2}\right)-1}}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4} = 0$ alors

$$\sin\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right) \sim \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4} \sim \frac{1}{n^2},$$

car

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} 1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2} = 1.$$

rappel : si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ alors $\exp(a_n) - 1 \sim a_n$.

comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n} - \frac{3}{n^2} = 0$ alors $\exp\left(\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}\right) - 1 \sim \frac{4}{n} - \frac{3}{n^2} \sim \frac{4}{n}$.
et donc $\sqrt{\exp\left(\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}\right) - 1} \sim \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Par conséquent,

$$u_n \sim \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{\sqrt{n}}} \sim \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n\sqrt{n}} = 0.$$