1

Analyse 2 - TD 1 (continuation)

Exo. 5.1 (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 7$.

Négation: $\exists n \in \mathbb{N};\ u_n > 7$.

(b) $\exists c \in \mathbb{R};\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = c$.

Négation: $\forall c \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N};\ u_n \neq c$.

$\hookrightarrow\ \sim(\exists c \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = c)$

$\Longleftrightarrow\ \sim \exists c \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = c$

$\Longleftrightarrow\ \forall c \in \mathbb{R},\ \sim \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = c$

$\Longleftrightarrow\ \forall c \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N};\ \sim(u_n = c)$

$\Longleftrightarrow\ \forall c \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N};\ u_n \neq c$.

Exo. 6.2 $(u_n)_n$ définie par $u_n = -n$ est décroissante et non-minorée, alors NON.

Si une suite $(u_n)_n$ est décroissante, alors

$u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots \Longleftrightarrow u_0 \geq u_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$,

donc elle est majorée par son premier terme. Donc OUI.

2

Exo. 6.1

(a) $\exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall n \geq n_0, u_n > 0.$

Négation : $\sim(\exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall n \geq n_0, u_n > 0)$

$\Leftrightarrow \sim \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall n \geq n_0, u_n > 0$

$\Leftrightarrow \forall n_0 \in \mathbb{N} ; \sim \forall n \geq n_0, u_n > 0$

$\Leftrightarrow \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 ; \sim(u_n > 0)$

$\Leftrightarrow \boxed{\forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 ; u_n \leq 0.}$

(b) $\exists n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \leq u_n.$

Négation : $\sim(\exists n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \leq u_n)$

$\Leftrightarrow \sim \exists n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \leq u_n$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \sim(u_{n+1} \leq u_n)$

$\Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n.}$

Exo. 5.2

Si $(u_n)_n$ est croissante, alors

$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \cdots \Rightarrow u_0 \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N},$

donc elle est minorée par son premier terme. Alors <u>OUI</u>.

La suite $(u_n)_n$ donnée par $u_n = n$ est croissante et non-majorée, alors <u>NON</u>.

Exo 7 $(u_n)_n$ donnée par $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{3}{k^2}\right),\ n \in \mathbb{N}^*$.

On note que

$$u_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{3}{k^2}\right) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\overbrace{\left(1-\frac{3}{1^2}\right)}^{=-2<0}}_{u_1}\overbrace{\left(1-\frac{3}{2^2}\right)}^{>0}}_{u_2}\overbrace{\left(1-\frac{3}{3^2}\right)}^{>0}}_{u_3\ \dots}\cdots\overbrace{\left(1-\frac{3}{n^2}\right)}^{>0}}_{u_n}\overbrace{\left(1-\frac{3}{(n+1)^2}\right)}^{>0}}_{u_{n+1}}$$

Autrement dit,

$$u_{n+1} = u_n\left(1-\frac{3}{(n+1)^2}\right) \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\frac{3}{(n+1)^2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1-\frac{3}{(n+1)^2} < 1$, donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \qquad (\star)$$

Afin de conclure, on note que $u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, $1-\frac{3}{1^2} = 1-3 = -2 < 0$ tandis que $1-\frac{3}{2^2} > 0$ et $1-\frac{3}{3^2} > 0$ et ainsi de suite. Puisque u_n est le produit de ces valeurs, on a $u_n < 0$. D'après $(\star)$ on a donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \implies u_{n+1} > u_n.$$

Par conséquent, $(u_n)_n$ est strictement croissante.

Exo. 8 On considère $(V_n)_{n\geq 3}$ définie par

$$V_n = \frac{\ln(n)}{n}, \quad n \geq 3.$$

On pose

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}, \quad x \geq 3.$$

On a

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

On pose

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{1-\ln(x)}{x^2} \geq 0$$

$$\overset{x>0}{\iff} 1-\ln(x) \geq 0$$

$$\iff \ln(x) \leq 1$$

$$\iff x \leq e \approx 2{,}718\ldots < 3.$$

Ainsi,

$$x \geq 3 \Rightarrow x > e \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ décroissante.}$$

Par conséquent, f est décroissante, donc $(V_n)_{n\geq 3}$ est elle aussi décroissante.

Exo. 9

1) $u_n = 2n+3$ | $(u_n)_n$ a la forme

$$u_n = nb + u_0,$$

avec $b=2$. On a, donc, une suite arithmétique de raison 2 et premier terme $u_0 = 3$. Elle est en plus croissante et non-bornée, $\lim u_n = +\infty$.

2) $u_{n+2} = 2u_n$ | $(u_n)_n$ a la forme

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n,$$

avec $a=0$ et $b=2$. C'est donc une suite définie par une relation de récurrence d'ordre 2. Supposons $u_0, u_1 \geq 0$

Devoir : justifier que $(u_n)_n$ est croissante et que, si u_0 et u_1 sont non nuls, alors $\lim u_n = +\infty$.

3) $u_{n+1} = u_n - 4$ | $(u_n)_n$ est définie par une relation de recurrence de la forme

$$u_{n+1} = u_n + b,$$

avec $b = -4$. C'est donc une suite arithmétique de rai-son -4. On peut l'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
u_n &= u_{n-1} - 4 \\
&= (u_{n-2} - 4) - 4 = u_{n-2} - 2\cdot 4 \\
&= (u_{n-3} - 4) - 2\cdot 4 = u_{n-3} - 3\cdot 4 \\
&= \circ\circ\circ = u_{n-n} - n\cdot 4 = u_0 - 4n
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{u_n = u_0 - 4n}$$

La suite $(u_n)_n$ est donc décroissante et non-bornée, $\lim u_n = -\infty$.

$\boxed{4) \; u_n = 2u_{n+1}}$ La suite $(u_n)_n$ est définie par une relation de récurrence de la forme

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n .$$

C'est donc une suite géométrique de raison $r = \frac{1}{2}$.

On peut l'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2} u_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} u_{n-2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 u_{n-2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2} u_{n-3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 u_{n-3} \\ &= \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^n u_{n-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0 . \end{aligned}$$

C'est donc une suite décroissante si $u_0 \geq 0$, décroissante si $u_0 < 0$ et, dans tous les cas, $\lim u_n = 0$. En particulier $(u_n)_n$ est borné (toute suite convergente est bornée).

$\boxed{5) \; u_{n+2} + 9u_n = 6u_{n+1}}$ C'est une suite définie par une relation de récurrence d'ordre 2

$$u_{n+2} = -9u_n + 6u_{n+1} .$$

7

Exo. 10

1) $\boxed{u_{n+1} = (n+1)u_n}$ $(u_n)_n$ n'est pas de type connu.

On peut écrire

$$u_n = n u_{n-1} = n(n-1)u_{n-2} = \dots = n(n-1)\cdots 1 \cdot u_0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = n!\, u_0}.$$

Ainsi, si $u_0 \geq 0$ alors $(u_n)_n$ est croissante, si $u_0 < 0$ alors $(u_n)_n$ est décroissante, si $u_0 \neq 0$ alors $(u_n)_n$ est non-bornée, et

$$\begin{cases} u_0 > 0 \Rightarrow \lim u_n = +\infty. \\ u_0 < 0 \Rightarrow \lim u_n = -\infty. \end{cases}$$

2') $\boxed{u_{n+1} = -2u_n}$ $(u_n)_n$ est définie par une relation de récurrence de la forme

$$u_{n+1} = r u_n, \text{ avec } r = -2.$$

Elle est donc une suite géométrique de raison -2.

On peut écrire

$$u_n = (-2)^n u_0.$$

Ainsi, sauf si $u_0 = 0$ ($\Rightarrow u_n = 0, \forall n$), $(u_n)_n$ est une suite alternantes, c-à-d., pas de limite si $u_0 \neq 0$.

2) $\boxed{u_{n+1} = -2u_n + 1}$ Suite de la forme

$$u_{n+1} = r u_n + b, \text{ avec } r = -2 \text{ et } b = 1.$$

Donc $(u_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique.

Devoir : justifier pourquoi $(u_n)_n$ n'est pas bornée. Si $u_0 \neq$ justifier que $(u_n)_n$ n'a pas de limite.

3) $u_n = 3^{n+2}$ | On peut écrire $u_n = 3^{n+2} = 3^2 3^n = 9 \cdot 3^n$.

Donc $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison 3 et premier terme $u_0 = 9$. La suite $(u_n)_n$ n'est pas bornée mais est monotone (strictement croissante) et $\lim u_n = +\infty$

4) $u_{n+2} = u_{n+1} + n$ | La suite $(u_n)_n$ n'est pas de type connu.

On peut quand même montrer que

$$u_{n+2} = u_0 - 1 + \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (\ast)$$

Devoir : montrer l'égalité $(\ast)$ en utilisant l'égalité connue

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exo. 11

1) $u_2 = 5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 3$ | $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison -3. À l'aide de $u_2 = 5$, on peut calculer u_1 et u_0 :

$$u_2 = u_1 - 3 \Rightarrow u_1 = u_2 + 3 = 5 + 3 \Rightarrow u_1 = 8$$

$$u_1 = u_0 - 3 \Rightarrow u_0 = u_1 + 3 = 8 + 3 \Rightarrow u_0 = 11.$$

On a, donc,

$$u_n = u_0 - 3n = \boxed{11 - 3n}$$

2) $u_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3 - 5u_n$ | $(u_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique. On pose

$$l = 3 - 5l \Rightarrow l = \frac{1}{2}.$$

9

Ainsi, on calcule

$$u_{n+1} = 3 - 5u_n \Rightarrow u_{n+1} - l = \cancel{3} - 5u_n - (\cancel{3} - 5l)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - l = -5u_n + 5l$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - l = -5(u_n - l). \quad (1)$$

On définit $v_n = u_n - l$. D'après (1), on a

$$v_{n+1} - l = -5v_n.$$

Donc $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison -5

Par conséquent,

$$v_n = (-5)^n v_0 \Rightarrow u_n - l = (-5)^n (u_0 - l)$$

$$\Rightarrow u_n = (-5)^n (u_0 - l) + l.$$

On substitue les valeurs $u_0 = 1$ et $l = \frac{1}{2}$ et on trouve

$$u_n = (-5)^n (u_0 - l) + l = (-5)^n \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow u_n = (-5)^n \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{2}\left((-5)^n + 1\right)}.$$

Exo. 12

1) $u_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$. On pose

$$l = 2l + 3 \Rightarrow l = -3$$

et on calcule

$$u_{n+1} = 2u_n + 3 \Rightarrow u_{n+1} - l = 2u_n + \cancel{3} - (2l + \cancel{3})$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - l = 2(u_n - l).$$

Alors $(v_n)_n$ donnée par $v_n = u_n - l$ est une suite géométri que de raison 2, c-à-d.,

$$V_n = 2^n V_0 \Rightarrow u_n - l = 2^n (u_0 - l)$$

$$\Rightarrow u_n = 2^n (u_0 - l) + l.$$

On substitue $l = -3$ et $u_0 = 1$ et on trouve

$$u_n = 2^n (u_0 - l) + l = 2^n (1 - (-3)) + (-3)$$

$$\Rightarrow u_n = 2^n \cdot 4 - 3$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = 2^{n+2} - 3}$$

2) $u_2 = 1$, $\left(\forall n \in \mathbb{N}_{n \geq 2}\right)$, $u_{n+1} = \sqrt{2 u_n}$.

Il est clair que $u_n > 0$, $\forall n \geq 2$. On peut donc appliquer $\ln$ à la suite. On trouve

$$\ln(u_{n+1}) = \ln(\sqrt{2u_n}) = \ln\left((2u_n)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(2u_n)$$

$$\Rightarrow \ln(u_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(\ln(2) + \ln(u_n)\right)$$

$$\Rightarrow \ln(u_{n+1}) = \frac{1}{2}\ln(u_n) + \frac{\ln(2)}{2}.$$

Si on écrit $x_n = \ln(u_n)$, on a donc

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{\ln(2)}{2}.$$

Ainsi, $(x_n)_{n \geq 2}$ est une suite arithmético-géométrique de la forme $x_{n+1} = r x_n + b$, avec $r = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{\ln(2)}{2}$

On pose

$$l = \frac{1}{2} l + \frac{\ln(2)}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} l = \frac{\ln(2)}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{l = \ln(2)}$$

11 / On calcule

$$x_{n+1} - \ell = \frac{1}{2}x_n - \cancel{\frac{\ln 2}{2}} - \left(\frac{1}{2}\ell + \cancel{\frac{\ln 2}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - \ell = \frac{1}{2}(x_n - \ell).$$

Ainsi, $(x_n-\ell)_{n\geq 2}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et qui commence au rang $n=2$, d'où

$$x_n - \ell = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}(x_2 - \ell)$$

$$\Rightarrow x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}(x_2 - \ell) + \ell.$$

On substitue $x_n = \ln(u_n)$, $x_2 = \ln(u_2) = \ln(1) = 0$ et $\ell = \ln 2$, et on obtient

$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}(x_2 - \ell) + \ell$$

$$\Rightarrow \ln(u_n) = \frac{1}{2^{n-2}}(0 - \ln 2) + \ln 2$$

$$\Rightarrow \ln(u_n) = -\frac{\ln 2}{2^{n-2}} + \ln 2$$

$$\Rightarrow \ln(u_n) = \ln\left(2^{-\frac{1}{2^{n-2}}}\right) + \ln 2$$

$$\Rightarrow \ln(u_n) = \ln\left(2^{-\frac{1}{2^{n-2}}} \cdot 2\right)$$

$$\Rightarrow \ln(u_n) = \ln\left(2^{1-\frac{1}{2^{n-2}}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = 2^{1-\frac{1}{2^{n-2}}}, \quad n \geq 2.}$$