L1S2 Analyse2
Plan détaillé du cours. Année 2021-2022

SUITES DE NOMBRES REELS
C 3 : Ordre total et suites réelles convergentes.

Dans ce chapitre, nous allons étudier les propriétés spécifiques des limites de suites de $\mathbb{R}$. Contrairement à $\mathbb{C}$, l'ensemble des réels possède une relation d'ordre total, notée $\leqslant$ comme il est d'usage.

$\mathbb{R}$ a l'avantage de posséder la propriété dite de la borne supérieure, cette propriété va se refléter dans l'étude de la notion de limites de suites réelles.

Dans ce qui suit, on suppose que les suites considérées vérifient des hypothèses énoncées à partir du rang $n = 0$. Il est facile de vérifier que les conclusions des propositions demeurent, même si ces suites ne sont supposées satisfaire leurs hypothèses qu'à partir d'un rang $N \in \mathbb{N}$ arbitrairement fixé.

1 Limites et inégalités

Proposition 1. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes.*

1. *Si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*
2. *Si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$, si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ (Théorème des gendarmes).*

! L'inégalité stricte n'est pas conservée par passage à la limite.

Théorème 2. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$.*
Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (v_n) diverge vers $+\infty$.
Si (v_n) diverge vers $-\infty$, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Exemple fondamental
Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

2 Suites réelles monotones

La monotonie des suites assure l'existence d'une limite (finie ou infinie) :

Théorème 3.
1. *Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.*
2. *Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.*
3. *Toute suite réelle croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.*
4. *Toute suite réelle décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.*

Remarque
- Si (u_n) est croissante sa limite est la borne supérieure de l'ensemble de ses valeurs : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
- Si (u_n) est décroissante sa limite est la borne inférieure de l'ensemble de ses valeurs : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Exemple fondamental
La suite géométrique de raison $a \in [0, 1[$ est convergente de limite 0.

Exemple important
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **croissante** telle que $f(I) \subset I$.
Pour tout $a \in I$, on considère la suite définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 & = a \\ u_{n+1} & = \quad f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Alors la suite (u_n) est monotone et sa monotonie est déterminée par le signe de $u_1 - u_0$:

1. si $u_1 - u_0 \leqslant 0$, la suite est décroissante,
2. si $u_1 - u_0 \geqslant 0$, la suite est croissante.

Proposition 4. *Si* $f : [a, b] \mapsto [a, b]$ *est une fonction continue et croissante, alors quelque soit* $u_0 \in [a, b]$*, la suite récurrente* (u_n) *est monotone et converge vers* $l \in [a, b]$ *vérifiant* $f(l) = l$*.*

3 Suites adjacentes

On peut déduire du théorème de convergence monotone, une conséquence très importante dans la pratique : *le principe de Cantor des* **intervalles emboîtés**. Il relie le comportement des suites monotones, qui est de **nature analytique**, à celui des intervalles de $\mathbb{R}$, qui est de **nature géométrique**.

Théorème 5. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, soit* $I_n = [a_n, b_n]$ *un intervalle non vide de* $\mathbb{R}$*. On suppose satisfaites les conditions suivantes :*

1. I_{n+1} *est inclus dans* I_n *;*
2. I_n *est un intervalle fermé et borné.*

Alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent,* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ *et* $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\lim\limits_{n\to+\infty} a_n, \lim\limits_{n\to+\infty} b_n]$.

Le théorème des suites adjacentes est un corollaire du principe des intervalles emboîtés dans le cas où la longueur des intervalles tend vers zéro.

Définition 1. Deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et la différence des deux converge vers 0.

On a

Théorème 6. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites adjacentes. Alors*

1. *elles sont convergentes et ont même limite,*
2. *leur limite commune* l *vérifie* $u_n \leqslant l \leqslant v_n$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

Remarque. Dans ce théorème il n'est pas nécessaire de supposer $u_n \leqslant v_n$. Cela va résulter des hypothèses.

Application **Le procédé de dichotomie :**
Il permet d'accéder, par encadrement, aux valeurs approchées d'une solution de l'équation $f(x) = 0$, f étant une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in]a, b[, f(c) = 0$. On cherche une valeur numérique d'un zéro c de f. La méthode consiste à construire une suite (x_n) qui converge vers un zéro de f.

4 Retour sur les suites extraites

Application aux suites définies par itération
$u_{n+1} = f(u_n)$ avec f décroissante alors les suites extraites des termes de rang pair et celle des termes de rang impair sont également définie par itération de la fonction $g = f \circ f$ qui est alors croissante. On est alors ramené à une étude analogue à celle faite dans le paragraphe 2.

Une suite convergente est bornée mais la réciproque est fausse. Nous avons tout de même l'existence d'une sous-suite convergente propriété connue sous le nom de **théorème de Bolzano-Weierstrass**.

Théorème 7. *De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.*

Exemple
• $u_n = (-1)^n$
• $u_n = \cos n$: il n'est pas facile de montrer explicitement qu'il existe une suite extraite convergente. Le théorème de Bolzano Weierstrass est un résultat d'existence mais qui n'indique pas comment expliciter une suite extraite convergente.