Université d'Avignon - UFR-ip Sciences — Année 2020-2021
L1 Physique-chimie — UE Math 2

Feuille d'exercices 2

Attention : Dans la plupart des exercices, la notation j représente le nombre complexe i t.q. $i^2 = -1$. Les énoncés ont été en effet écrits avec la notation physicienne du nombre complexe i. Donc, si cela n'est pas précisé, il faut interpréter j comme étant le nombre complexe i.

Exercice 1. Rappeler les racines n-ièmes de l'unité. Calculer j^n (où $j = \exp(2i\pi/3)$), i^n. Faire un dessin des racines 8-ièmes de l'unité.

Exercice 2. 1) Trouver la forme algébrique des nombres complexes suivants : $z = (2-3j)(5+2j)$, $z = (1+j)(1-j)^2$, $z = \frac{1}{1+j}$, $z = \frac{3+j}{1-j}$, $z = ((1-j)/(1+j))^2$.
2) Module et argument de $z = \frac{1+j\sqrt{3}}{\sqrt{3}+j}$.

Exercice 3. Calculer j^2, j^3, j^4, j^{76} et plus généralement j^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4. Effectuer le produit

$$(z-1-j)(z-1+j)(z+1+j)(z+1-j).$$

En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 + 4 = 0$.

Exercice 5. 1) Représenter les nombres $J = \frac{-1+j\sqrt{3}}{2}$ et J^2. Montrer que $J^2 = \bar{J}$, $J^3 = 1$, et $1+J+J^2 = 0$.
2) Résoudre $(z-j)^3 = 1$.

Exercice 6. Résoudre $z^3 = \bar{z}$ (regarder si $z = 0$ ou $z \neq 0$; regarder la valeur possible pour $|z|$...)

Exercice 7. Déterminer l'argument principal des nombres complexes non nuls suivants , et trouver leur forme exponentielle :

$$z = 3+3j, \qquad z = -1, \qquad z = -1+\sqrt{3}j,$$
$$z = \pi, \qquad z = 2j, \qquad z = -j-\sqrt{3}$$

Exercice 8. Trouver la forme algébrique pour $z = \frac{1+\alpha j}{2\alpha+(\alpha^2-1)j}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\left(\dfrac{1+j\sqrt{3}}{1-j}\right)^{19}$.

Exercice 10. Résoudre les équations suivantes :

$$1.\ z^3 = \frac{1+j}{1-j} \qquad 2.\ z^3 = -8 \qquad 3.\ z^4 = -2$$

Exercice 11. Calculer $(1+2j)^4$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -7-24j$.

Exercice 12. Déterminez les racines dans $\mathbb{C}$ des polynômes suivants :

$$P(z) = z^2 - 2z + 20, \quad P(z) = z^3 + z^2 + 3z - 5.$$

Exercice 13. En utilisant les formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j},$$

a) montrer les formules suivantes :

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}, \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}.$$

b) Obtenir des formules pour $\cos^3\theta$, $\sin^3\theta$ et $\cos^4\theta$.

Exercice 14. Trouver la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right)^3, \qquad z = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right)^{-2}.$$

Exercice 15. Soit z et z' deux nombres complexes de module 1. Montrer que si $zz' \neq -1$, alors $Z := \dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel (penser au conjugué).

Exercice 16. Soit

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

un polynôme à coefficients réels (c'est-à-dire que $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i = 0, 1, \ldots, n$). Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est une racine de P si et seulement si $\bar{z}$ l'est aussi.

Exercice 17. A l'aide la formule de Moivre déterminer la forme trigonométrique de $(1+i)^n$ et $(1-i)^n$, puis en déduire une expression simple de $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Exercice 18. Résoudre les équations $z^4 - 4z^2 + 5 = 0$, $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$ (un peu long pour le 2ème ; poser $Z = z^2$).

Exercice 19. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $z = (\alpha - j)(10 - \alpha + j(2+\alpha))$ soit réel.

Exercice 20. [plus dur] On cherche à trouver 3 nombres complexes z, z', z'' tels que

$$z + z' + z'' = 1 \ ; \ zz'z'' = 1 \ ; \ |z| = |z'| = |z''| = 1.$$

1) En divisant par $zz'z''$, montrer que

$$zz' + zz'' + z'z'' = \frac{1}{z} + \frac{1}{z'} + \frac{1}{z''} = \bar{z} + \bar{z}' + \bar{z}'',$$

et en déduire que $zz' + zz'' + z'z'' = 1$.
2) On admet le résultat suivant : soit S, P, et D trois nombres complexes. Alors z, z', z'' sont solutions de

$$z + z' + z'' = S \ ; \ zz' + zz'' + z'z'' = D \ ; \ zz'z'' = P$$

si et seulement si z, z', z'' sont les racines du polynôme $Z^3 - SZ^2 + DZ - P = 0$. En utilisant ce résultat, montrer que z, z', z'' sont solutions de l'équation $Z^3 - Z^2 + Z - 1 = 0$. En déduire toutes les valeurs possible de $\{z, z', z''\}$.

Exercice 21. [en lien avec le chapitre suivant]
1) Soit $f(t) = e^{(1+j)t}$. Trouver les deux solutions de l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$. Calculer $f'(t), f''(t)$ puis montrer que $f'' - 2f' + 2f = 0$.
2) Ecrire $f(t), f'(t), f''(t)$ sous forme exponentielle. En déduire l'écriture algébrique de $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$. A quoi sont égales $Re(f(t))$ et $Im(f(t))$?
3) En déduire deux fonctions réelles solutions de $y'' - 2y' + 2y = 0$