Math II
Licence Physique - Chimie
Chapitre 2 : Nombres complexes

Térence Bayen

Université d'Avignon

terence.bayen@univ-avignon.fr

Objectifs du chapitre

- Savoir faire des calculs dans $\mathbb{C}$ en cartésien et en polaire
- Résoudre une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{R}$ avec $\Delta < 0$;
- Exponentielle complexe: manipulations sur $\exp i\theta$ / modules et arguments de $z \in \mathbb{C}$.
- Connaître les racines de l'unité.

A la fin des transparents, notez qu'il y a des transparents hors programmes et aussi des transparents de rappel. Les équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$ sont hors programme.

Quelques motivations

Les complexes servent dans beaucoup de domaines des sciences, beaucoup en physique (électricité, équations différentielles...). En physique, la tradition veut que l'on note j le nombre complexe i t.q. $i^2 = -1$ à cause de l'intensité du courant.

Une des idées de départ des nombre complexes est l'impossibilité de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$x^2 + 1 = 0$$

et la résolution d'équations algébriques de degré 3:

$$x^3 + px + q = 0$$

par Cardan au XVIème siècle.

Notation: i est une racine carrée de -1, c-à-d un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

$$i = \sqrt{-1}$$

Définition

- Un nombre complexe z est défini par la donnée de deux réels a et b et s'écrit $z = a + ib$. Le nombre réel a est appelé la partie réelle de z, et se note $\Re(z)$; le réel b est appelé la partie imaginaire de z, et se note $\Im(z)$.
- On définit dans $\mathbb{C}$ l'addition par

  $$(A) \qquad (a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d),$$

  la multiplication par

  $$(M) \qquad (a+ib)\times(c+id) = (ac' - bd) + i(ad+bc).$$

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Exemple : $(2+3i)\times(-1+4i) = (2\times(-1)-3\times 4) + i(2\times 4 + 3\times(-1)) = -14+5i$.

Quelques propriétés

Etant donné $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$,

- si $a = 0$, on dit que $z = ib$ est imaginaire pur ;
- si $b = 0$, on dit que $z = a$ est réel ;
- $i^2 = -1 \Rightarrow$ l'inverse de i est $-i$:

$$\frac{1}{i} = -i$$

Quand vous écrivez un nombre complexe $z = a + ib$, NE PAS OUBLIER de dire que $a, b \in \mathbb{R}$.

Propriétés (suite)

Théorème

On a les propriétés

1) Associativité de l'addition : $(z+z')+z'' = z+(z'+z'')$.

2) Commutativité de l'addition : $z+z' = z'+z$.

3) 0 est élément neutre pour l'addition : $z+0 = 0+z = z$.

4) Tout nombre complexe $z = a+ib$ a un opposé : le nombre complexe $(-a)+i(-b)$, noté $-z$, vérifie $z+(-z) = (-z)+z = 0$.

5) Associativité de la multiplication : $(z\times z')\times z'' = z\times(z'\times z'')$.

6) Commutativité de la multiplication : $z\times z' = z'\times z$.

7) 1 est élément neutre pour la multiplication : $z\times 1 = 1\times z = z$.

8) Tout élément $z = a+ib\in\mathbb{C}$ t.q. $(a,b)\neq(0,0)$ possède un inverse : $z' = \frac{a}{a^2+b^2} + i(\frac{-b}{a^2+b^2})$. On a $z\times z' = z'\times z = 1$; z' est appelé l'inverse de z, et est noté $(1/z)$ ou z^{-1}.

9) Distributivité : $z\times(z'+z'') = (z\times z')+(z\times z'')$.

$$\frac{1}{1+2i} = \frac{1}{1^2+2^2} + i\Big(-\frac{2}{1^2+2^2}\Big) = \frac{1}{5} - i\frac{2}{5}.$$

(on verra qu'il s'agit en fait de multiplier $1+2i$ par son conjugué $1-2i$).

Propriétés (suite)

- Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $z^n := \underbrace{z \times \ldots \times z}_{n \textit{ fois}}$. On pose $z^0 := 1$. Pour $n \in \mathbb{Z}_-^*$, $z^n := 1/z^{|n|}$.
- Intégrité :
$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \;\; zz' = 0 \iff z = 0 \text{ ou } z' = 0$$
- Si $a \in \mathbb{R}_-^*$, l'équation $z^2 = a$ possède deux solutions $i\sqrt{|a|}$ et $-i\sqrt{|a|}$. En effet, on a
$$z^2 = a \iff z^2 = (j\sqrt{|a|})^2 \iff (z - j\sqrt{|a|})(z + j\sqrt{|a|}) = 0 \iff z - j\sqrt{|a|} = 0 \text{ ou } z + j\sqrt{|a|} = 0.$$
- Pour $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, on a
$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

Exemple : $z^2 = -9 = (3i)^2 \Rightarrow z = \pm 3i$.

Equation du second degré

Proposition

Soit $P(t) = at^2 + bt + c$ un polynôme à coefficients réels de degré 2 (c-à-d $a \neq 0$). Alors P a au moins une racine (réelle ou complexe). Si on note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de P, on a

- *si $\Delta = 0$, alors $P(t) = a(t + \frac{b}{2a})^2$ a une racine double, $-\frac{b}{2a}$;*
- *si $\Delta > 0$, alors P a deux racines réelles différentes, $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;*
- *si $\Delta < 0$, alors P a deux racines complexes non réelles différentes, $\frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.*

Exemples : $z^2 + 4 = 0$ a pour solution $z = \pm 2i$; $z^2 + z + 1 = 0$ a pour solution $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Affixe d'un point du plan

On considère le plan orienté, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v}) = (O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

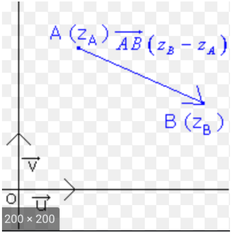
Définition

- On appelle image du nombre complexe $z = a + ib$ le point M du plan de coordonnées a, b dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- On appelle vecteur image de z le vecteur $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
- On dit que z est l'affixe (complexe) du point $M = M(z)$ (ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$).

Remarque

(i) Le vecteur image de $z_1 + z_2$ est la somme du vecteur image de z_1 et du vecteur image de z_2 :
$\overrightarrow{OM(z_1 + z_2)} = \overrightarrow{OM(z_1)} + \overrightarrow{OM(z_2)}$.

(ii) Le vecteur image de $z_2 - z_1$ est
$\overrightarrow{OM(z_2 - z_1)} = \overrightarrow{OM(z_2)} - \overrightarrow{OM(z_1)} = \overrightarrow{M(z_1)M(z_2)}$.



Conjugué / conjugaison

Définition

On appelle nombre complexe conjugué de $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$), le nombre complexe $\bar{z} := a - ib$.

Exemple: $\overline{1+i} = 1 - i$, $\overline{3} = 3$, $\bar{i} = -i$, $\overline{4 + i \times i} = \overline{3} = 3$.

Proposition

1) $\forall z \in \mathbb{C}$, $Re(\bar{z}) = Re(z)$, $Im(\bar{z}) = -Im(z)$,

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \ , \ Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

2) Un nombre complexe z *est réel si et seulement si* $\bar{z} = z$.

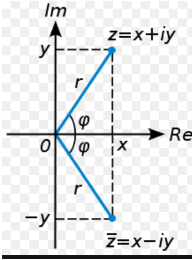
3) Un nombre complexe z *est imaginaire pur si et seulement si* $\bar{z} = -z$.

4) $\forall z_1 \in \mathbb{C}$, $\forall z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.

Si $z_2 \neq 0$, $\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$.

Interprétation géométrique : Le point $M(\bar{z})$ d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique orthogonal du point $M(z)$ d'affixe z par rapport à l'axe des x.

Quantité conjuguée



Méthode : Pour mettre sous forme agébrique le quotient de deux nombres complexes, il suffit de multiplier dénominateur et numérateur de la fraction par la quantité conjuguée du dénominateur $z_1/z_2 = z_1\bar{z}_2/z_2\bar{z}_2$.

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1-i}{2} \quad ; \quad \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

Module

Définition

Pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle module de z le réel positif ou nul $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemple $|1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, $|4i| = 4$, $|-2| = 2$.

Interprétation géométrique : Le module de z est la distance euclidienne entre O et $M(z)$, le point image de z : $|z| = OM(z)$. Le module de $z' - z$ est la distance euclidienne entre $M(z)$ et $M(z')$: $|z' - z| = M(z)M(z')$.

Proposition

Pour tout z et z' dans $\mathbb{C}$,

1) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$, $|Re(z)| \leq |z|$, $|Im(z)| \leq |z|$.

2) $|z| \in \mathbb{R}_+$ *et* ($|z| = 0 \iff z = 0$).

3) $|z|^2 = z\bar{z}$. *Si* $z \neq 0$, $1/z = \bar{z}/|z|^2$.

4) Un nombre complexe a pour module 1 si et seulement si $\bar{z} = 1/z$.

5) $|zz'| = |z||z'|$ *et si* $z' \neq 0$, $|z/z'| = |z|/|z'|$.

6) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (*inégalité triangulaire*[1]) *et égalité ssi* $\exists t \in \mathbb{R}_+$, $z = tz'$.

[1] cf. dans un triangle

Exercice

Exercice

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|iz - 1| = |iz + 1|$.

Exercice

Exercice

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|iz-1| = |iz+1|$.

Solution : Soit $z \in \mathbb{C}$, on a $|iz-1| = |iz+1|$ si et seulement si $|i(z+i)| = |i(z-i)|$, donc ssi $|i|.|z+i| = |i|.|z-i|$ c.a.d. ssi

$$|z-i| = |z+i|.$$

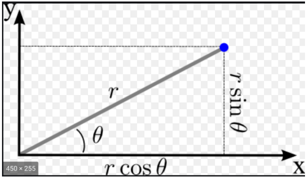
Notons A et B les points d'affixes i et $-i$. Soit M le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$, alors $|iz-1| = |iz+1|$ si et seulement si $AM = BM$, donc si et seulement si M appartient à la médiatrice de $[A, B]$ et par conséquent si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

Ecriture polaire

Le but est de repérer dans le plan un point M (d'affixe z) par le paramétrage polaire

On va voir que tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de façon cartésienne (algébrique) ou polaire:

$$z = \underbrace{a + ib}_{cartesien} = \underbrace{re^{i\theta}}_{polaire}$$



$$\vec{w} = \cos\theta.\vec{u} + \sin\theta.\vec{v} \quad ; \quad \overrightarrow{OM} = r\vec{w}$$

Formalisons un peu plus (pour l'unicité notamment).

Ecriture polaire / argument

Proposition

Soit z un nombre complexe non nul. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|(\cos\theta + j\sin\theta)$. le point M du plan d'affixe z a alors comme coordonnées polaires $r = |z|$ et θ.

- Donc, tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ s'écrit en polaire :

$$z = re^{i\theta} \quad r \in \mathbb{R}_+$$

- $r \in \mathbb{R}_+$ est unique ; θ n'est PAS unique.

Définition

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$. On appelle argument de z tout réel θ tel que $z/|z| = \cos\theta + j\sin\theta$ i.e. $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z ssi

$$\cos\theta = a/\sqrt{a^2+b^2} \quad ; \quad \sin\theta = b/\sqrt{a^2+b^2}.$$

L'écriture $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ s'appelle la forme polaire de z.

Argument principal

Le plan étant muni du repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$, un argument de z est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM(z)})$.

Définition

On appelle argument principal de z l'unique argument de z élément de l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On le note $\arg(z)$.

Exemple : On a $(-2i)/|-2i| = (-2i)/2 = -i = \cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)$. Donc $-\pi/2$ est un argument (c'est l'argument principal) de $-2i$. On a
$(1+i)/|1+i| = (1+i)/\sqrt{2} = (1/\sqrt{2}) + i(1/\sqrt{2}) = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)$, donc $\pi/4$ est un argument (l'argument principal) de $1+i$.

METHODE pour mettre sous forme polaire!

Pour déterminer la forme polaire de $z \in \mathbb{C}^*$:

- on calcule $|z|$
- puis on cherche θ tel que $z/|z| = \cos\theta + j\sin\theta$. VOUS DEVEZ CONNAITRE LES VALEURS PARTICULIERES DE COS ET SIN : $\theta = \pi/6, \pi/3, \pi/4$

$$\begin{cases}\cos(\pi/3) = 1/2\\ \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2\end{cases} \quad \begin{cases}\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2\\ \sin(\pi/6) = 1/2\end{cases} \quad \begin{cases}\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2\\ \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2\end{cases}$$

Exemples : Ecrire sous forme polaire i, $1+i$ et $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$;
- $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$ d'où $1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$;
- comme $-\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{2\pi}{3}$, on a $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

Exponentielle complexe

L'écriture exponentielle est:

$$e^{i\theta} = exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

et $e^{i\theta}$ est donc le nombre complexe de module 1 et d'argument θ. On a

$$e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \theta_2 - \theta_1 = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

<u>Exemples</u> : $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{-i\pi/2} = -i$, $e^{i\pi/6} = (\sqrt{3}/2) + (i/2)$, $e^{i7\pi/2} = e^{-i\pi/2} = -i$.

Proposition

1) $\forall(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2,\ e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

2) $\forall\theta \in \mathbb{R},\ (1/e^{i\theta}) = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.

3) $\forall\theta \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, *i.e.* $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ *(formule de Moivre)*

4) $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ *(formules d'Euler)*

SAVOIR LES FORMULES D'EULER ET DE MOIVRE PAR COEUR

Propriété

Formule de Moivre:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Formule d'Euler:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Forme exponentielle d'un nombre complexe z

Définition

La forme exponentielle d'un nombre complexe z est $z = re^{j\theta}$, où r est le module de z et (si $z \neq 0$) θ est un argument de z.

On a, pour $r_1, r_2 > 0$,

$$r_1 e^{j\theta_1} = r_2 e^{j\theta_2} \iff r_1 = r_2 \text{ et } \theta_2 - \theta_1 \text{ est un multiple de } 2\pi.$$

Théorème

Si $z = re^{j\theta}$, $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$ alors $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}$ et pour $n \in \mathbb{Z}$, $z^n = r^n e^{jn\theta}$.

Conséquences :

- Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. On note θ_i un argument de z_i et r_i le module de z_i. Alors $\theta_1 + \theta_2$ (resp. $\theta_1 - \theta_2$) est un argument de $z_1 z_2$ (resp. z_1/z_2) et $r_1 r_2$ (resp. r_1/r_2) est le module de $z_1 z_2$ (resp. z_1/z_2). On a ainsi une interprétation géométrique de la multiplication dans $\mathbb{C}$.
- Si θ est un argument de $z \in \mathbb{C}^*$ et r est son module, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n\theta$ est un argument de z^n et r^n est le module de z^n.

Exercice

Soit $z_1 = e^{j\pi/3}$ et $z_2 = e^{-j\pi/4}$. On a $z_1 z_2 = e^{j\pi/12}$. En écrivant z_1, z_2 et $z_1 z_2$ sous forme algébrique, on peut en déduire $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$! A faire / réfléchir.

Le classico de 2021

Exercice

Trouver l'argument principal du nombre complexe i^{2021} et de $(e^{\frac{2i\pi}{3}})^{2021}$.

Le classico de 2021

Exercice

Trouver l'argument principal du nombre complexe i^{2021} et de $(e^{\frac{2i\pi}{3}})^{2021}$.

Pour cet exo, on anticipe un peu sur les racines 4-èmes de l'unité:

$$i^2 = -1 \quad ; \quad i^3 = -i \quad ; \quad i^4 = 1$$

d'où on raisonne modulo 4: $2021 = 4 \times 505 + 1 \Rightarrow$

$$i^{2021} = e^{\frac{i\pi(4\times 505+1)}{2}} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i \quad \Rightarrow \quad \theta = \pi/2$$

Le 2ème est analogue (à chercher).

Prolongement de exp

Ce transparent n'est PAS au programme.

Définition

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $e^z = e^{\Re(z)} e^{j\Im(z)}$.

Propriété

- $\forall z_1, z_1 \in \mathbb{C}, e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2}$. (Equation fonctionnelle);
- Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, on a
  1. $e^z \neq 0$;
  2. $|e^z| = e^{\Re(z)}$;
  3. $arg(z) = \Im(z)[2\pi]$;
  4. $1/e^z = e^{-z}$;
  5. $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$.

Remarque

On a donc $e^z = e^{\Re(z)} e^{j\Im(z)}$ qui est une écriture sous forme polaire de e^z.

Proposition

(Périodicité de l'exponentielle) Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $e^{z_1} = e^{z_2}$ si et seulement si $\Re(z_1) = \Re(z_2)$ et $\Im(z_1) = \Im(z_2)[2\pi]$.

Prolongement de exp

Ce transparent n'est PAS au programme.

Ce qui précède permet de résoudre les équations du type

$$e^z = \omega$$

où $\omega \in \mathbb{C}^*$. On écrit ω sous forme polaire $\omega = re^{j\theta} = e^{\ln(r)+j\theta}$. L'équation $e^z = \omega$ est alors équivalente à $\Re(z) = \ln(z)$ et $\Im(z) = \theta[2\pi]$.

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = -7$. Puisque $-7 = e^{\ln(7)+i\pi}$, l'équation $e^z = -7$ admet pour solutions les nombres de la forme $\ln(7) + (2k+1)i\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Dérivée de exp

Ce transparent n'est PAS au programme (MAIS UTILE POUR LES EDO D'ORDRE 2)

Définition

Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ une fonction. Notons $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$, avec $\gamma_1(t) = \Re(\gamma(t))$ et $\gamma_2(t) = \Im(\gamma(t))$. La fonction γ est dérivable si γ_1 et γ_2 le sont. On a alors

$$\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t).$$

Une fonction polynôme (complexe) est toujours dérivable!

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables. Alors $\bar{f}$, $f + g$ et $f.g$ le sont aussi et on a

$$(\bar{f})' = \overline{f'}, \quad (f+g)' = f' + g' \quad \text{et} \quad (fg)' = fg' + f'g.$$

Proposition

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. L'application $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{t\alpha}$ admet des dérivées de tout ordre, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \gamma^{(n)}(t) = \frac{d^n e^{t\alpha}}{dt^n}(t) = \alpha^n e^{t\alpha}.$$

Exemples

- Soit l'application $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it}$. On a alors $\gamma'(t) = i\gamma(t)$; le vecteur tangent à la courbe (la courbe est un cercle) est orthogonal au vecteur qui joint l'origine au point d'affixe $\gamma(t)$.
- Soit $f(t) = (\alpha t + \beta)e^{\omega t}$ avec α, β et ω des nombres réels. Alors

$$f'(t) = (\alpha\omega t + \beta\omega + \alpha)e^{\omega t}.$$

Proposition

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{i\omega t}$ vérifie l'équation différentielle $f'' + \omega^2 f = 0$.

En effet:

$$f'(t) = i\omega e^{i\omega t} \quad ; \quad f''(t) = (i\omega)^2 e^{i\omega t}$$

Rappels

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \begin{cases}\cos(x+2k\pi) = \cos x\\ \sin(x+2k\pi) = \sin x\end{cases} \quad \begin{cases}\cos(\pi - x) = -\cos x\\ \cos(\pi + x) = -\cos x\end{cases} \quad \begin{cases}\sin(\pi - x) = \sin x\\ \sin(\pi + x) = -\sin x\end{cases}$$

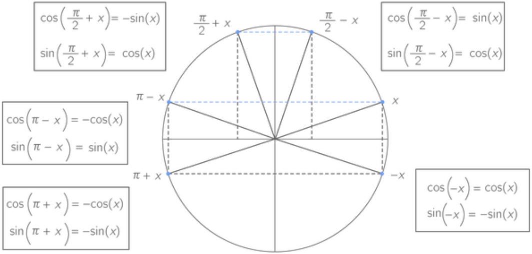
$$\begin{cases}\cos(\pi/3) = 1/2\\ \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2\end{cases} \quad \begin{cases}\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2\\ \sin(\pi/6) = 1/2\end{cases} \quad \begin{cases}\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2\\ \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2\end{cases}$$

tan est π-périodique et est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + \pi\mathbb{Z}\}$

$$\begin{cases}\cos x = \cos y \iff x = y + 2k\pi \text{ ou } x = -y + 2k\pi.\\ \sin x = \sin y \iff x = y + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - y + 2k\pi.\end{cases} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$\cos(\pi/2 - x) = \sin(x) \quad \sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

Rappels (suite)



Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin 2x = 2\sin x \cos x \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{cases}$$

Preuve : par les complexes : $e^{2ix} = (e^{ix})^2 = (\cos x + i \sin x)^2 \Rightarrow \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\sin 2x = 2\sin x \times \cos x$.

Racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il arrive souvent de tomber sur l'équation (importante) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^n = 1 \tag{1}$$

Définition

Les racines n-ièmes de l'unité sont les n nombres complexes

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Propriété

L'équation (1) admet exactement n solutions qui sont les n racines-n-ièmes de l'unité.

Pour $n = 2$, $z^2 = 1$ ssi $z = \pm 1$.

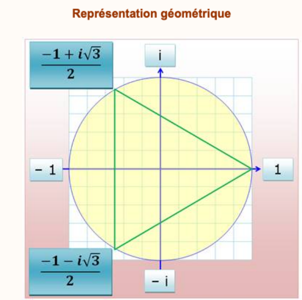
Remarque

Les racines n-ièmes de l'unité sont les affixes des sommets du polygône régulier à n cotés, de centre d'affixe 0, dont un des sommets est le point d'affixe 1.

Racines 3èmes de l'unité

Il s'agit des nombres complexes t.q. $z^3 = 1$ ce qui donne

$$z = e^{\frac{2ik\pi}{3}},\ 0 \leq k \leq 2 \quad \text{c.a.d.} z = 1, j, j^2 \quad \text{avec} \quad j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



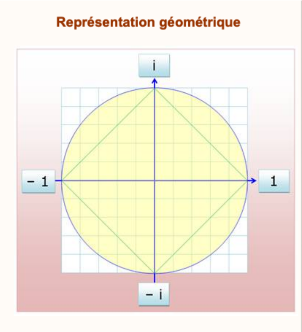
Noter que

$$1 + j + j^2 = 0 \quad ; \quad j^3 = 1 \quad ; \quad j^2 = \bar{j}$$

Racines 4èmes de l'unité

Il s'agit des nombres complexes t.q. $z^4 = 1$ ce qui donne

$$z = e^{\frac{2ik\pi}{4}},\ 0 \leq k \leq 3 \quad \text{c.a.d.} \quad z = 1, i, -1, -i$$



Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Ce transparent n'est PAS au programme

Définition

Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathbb{C}^*$. L'ensemble des racines n-ièmes de A est

$$U_n(A) := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ z^n = A\}.$$

Théorème

Soit θ un argument de A. $U_n(A)$ a exactement n éléments qui sont

$$|A|^{1/n} exp(i(\theta + 2k\pi)/n),\ 0 \leq k \leq n-1\,.$$

Proposition

(i) On obtient les n racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul en multipliant l'une d'entre elles par les n racines n-ièmes de l'unité.
(ii) Pour $n \geq 2$*, la somme de n racines nièmes d'un nombre complexe* $A \in \mathbb{C}^*$ *est* 0.

(série géométrique : si $z \neq 1$, $1 + z + ... + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$)

Méthode de factorisation par l’angle moitié

Ce transparent n’est PAS au programme

Méthode de factorisation par l’arc moitié. Soient $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. On déduit des propriétés de l’exponentielle

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)/2}(e^{i(\theta-\varphi)/2} + e^{-i(\theta-\varphi)/2})$$

d’où

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2\cos((\theta-\varphi)/2)e^{i(\theta+\varphi)/2}.$$

Formule du binôme

Ce transparent n'est PAS au programme (MAIS UTILE)

Proposition

(formule du binôme) *Pour* $z, z' \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}$,

$$(z+z')^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) z^k (z')^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) z^{n-k} (z')^k.$$

Exemples :

$(z+z')^3 = z^3 + 3z^2 z' + 3z(z')^2 + (z')^3$;

$(z+z')^4 = z^4 + 4z^3 z' + 6z^2 (z')^2 + 4z(z')^3 + (z')^4$.

Ce transparent n'est PAS au programme (mais TRES utile). Soit l'équation

$$az^2 + bz + c = 0,$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Cette équation est équivalente à

$$(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0\,.$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta = 0$, l'équation a une racine double $z = \frac{-b}{2a}$.
Si $\Delta \neq 0$, il existe exactement deux nombres complexes opposés dont le carré vaut Δ. Notons les d et $-d$. L'équation a deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$, qui sont

$$z_1 = \frac{-b + d}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - d}{2a}$$

Calcul des racines carrées de Δ. Si $\Delta \in \mathbb{R}_+^*$, on peut poser $d = \sqrt{\Delta}$ et si $\Delta \in \mathbb{R}_-^*$, on peut poser $d = j\sqrt{-\Delta}$.

Si $\Delta = u + jv \notin \mathbb{R}$, Δ a deux racines carrées opposées qui ne sont pas imaginaires pures, donc Δ a une unique racine carrée de partie réelle > 0. Notons la $a + jb$ ($a > 0$). Comme $(a + jb)^2 = \Delta$, on a

$$a^2 - b^2 = u \tag{2}$$

$$2ab = v \tag{3}$$

D'autre part, $|a + jb|^2 = |\Delta|$ donc

$$a^2 + b^2 = \sqrt{u^2 + v^2}. \tag{4}$$

(2) et (4) permettent de calculer a^2 et b^2. On en déduit a et b, sachant que $a > 0$ et (3) fournissant le signe de b.