Math II
Licence Physique - Chimie

Térence Bayen

Université d'Avignon

A partir du 17 mars 2020

Chapitre 3 : Equations différentielles

Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Equations différentielles linéaires d'ordre 1 homogènes

Definition

On appelle équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 l'équation

$$y' + a(t)y = 0 \qquad (E_H)$$

où $a : I \to \mathbb{R}$ est une application continue. L'inconnue est la fonction y de classe C^1.

- A droite de l'égalité on a 0 : on parle d'équation homogène. Lorsque le second membre n'est pas 0, l'équation est dite non-homogène.
- Si on a l'équation

  $$b(t)y' + c(t)y = 0$$

  avec $b, c : I \to$ des applications continues et $b(t) \neq 0, \forall t \in I$, on se ramène au cas précédent en posant $a = \frac{c}{b}$.

Solution de E_H

Proposition

Les solutions de (E_H) sont les fonctions

$$t \mapsto C \exp(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds) \tag{1}$$

où $t_0 \in I$ et $C \in \mathbb{R}$.

<u>Preuve</u> : Vérifier à la main en dérivant...

A savoir par coeur

A la physicienne

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y(t) = b(t)$$

$$\frac{dy}{y} = -a(t)dt$$

On intègre :

$$\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = -\int_{t_0}^{t} a(s)ds + Cste$$

$$y(t) = y_0 \exp(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds + Cste) = C\exp(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds)$$

Exemple 1

$y' + ty = \exp(t - t^2/2)$

Recherche de y_H : $y_H(t) = C\exp(-t^2/2)$

Recherche de y_P : $y_P(t) = C(t)\exp(-t^2/2)$. On trouve en refaisant le calcul précédent :

$$C'(t)\exp(-t^2/2) = \exp(t - t^2/2) \;\Rightarrow\; C'(t) = \exp(t) \Rightarrow$$

$C(t) = \exp(t) + Cste$, peu importe pour $Cste$, d'où
$y_P(t) = C(t)\exp(-t^2/2)$

Conclusion :

$$y(t) = \underbrace{C\exp(-t^2/2)}_{y_H} + \underbrace{\exp(t - t^2/2)}_{y_P}$$

Exemple

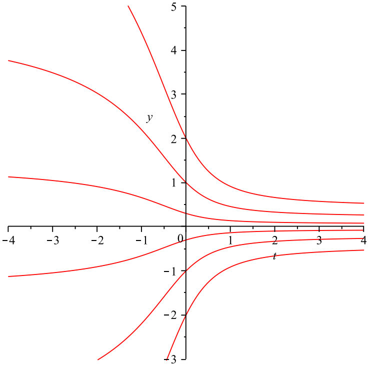
- $y' + (t-1)y = 0 \Rightarrow$
$$y(t) = C\exp(-\frac{(t-1)^2}{2})$$
- $y' + \cos(t)y = 0 \Rightarrow$
$$y(t) = C\exp(-\sin t)$$

Notez qu'il n'y a pas de t_0 (le terme avec t_0 peut être mis dans la constante C lorsque l'on ne spécifie pas la condition initiale). Lorsque la condition initiale est fixée (à un temps initial), voir plus loin la notion de problème de Cauchy.

$$y' + \frac{1}{t^2+1} y = 0$$

$\Rightarrow$ les solutions s'écrivent

$$y(t) = Ce^{-\arctan(t)}$$



Equations différentielles linéaires d'ordre 1 non-homogène

Definition

On appelle équation différentielle linéaire non-homogène d'ordre 1 l'équation

$$y' + a(t)y = b(t) \qquad (E_{NH})$$

où $a, b : I \to \mathbb{R}$ sont deux applications continues. L'inconnue est la fonction y de classe C^1.

Proposition

Les solutions y de cette équation se trouvent en additionnant une solution y_H de (E_H) et une solution particulière y_P de (E_{NH}) :

$$y = y_H + y_P$$

- Pour trouver une solution de (E_H), apprendre la formule (1) par coeur.
- Pour trouve une solution de (E_{NH}), apprendre la méthode de variation de la constante ci-après.

Méthode de variation de la constante

Regardez bien le calcul suivant fondamental en pratique.

Ne pas retenir la formule par coeur : savoir faire ce calcul en pratique dans tous les cas.

On charche $y_P = C(t)\exp(-\int_{t_0}^t a(s)ds) \Rightarrow$

$$y_P' + a(t)y(t) = C'(t)\exp(-\int_{t_0}^t a(s)ds) = b(t) \ \Rightarrow$$

$$C'(t) = b(t)\exp(\int_{t_0}^t a(s)ds) \ \Rightarrow$$

$$C(t) = \int_{t_0}^t b(s)\exp(\int_{t_0}^s a(\tau)d\tau)ds + Cste$$

Méthode de variation de la constante

en prenant $Cste = 0$ (peu importe pour $Cste$, on s'en fiche, voir la notion "problème de Cauchy" plus loin) on a donc :

$$y_p(t) = \int_{t_0}^{t} b(s) \exp(\int_{t_0}^{s} a(\tau) d\tau) ds \exp(- \int_{t_0}^{t} a(s) ds)$$

$$y_p(t) = \int_{t_0}^{t} b(s) \exp(\int_{t}^{s} a(\tau) d\tau) ds$$

Théorème général

Théorème

Soit $a, b : I \Rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Les solutions de l'équation différentielle

$$y' + a(t)y(t) = b(t)$$

s'écrivent

$$y(t) = C \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(t)dt\right) + \int_{t_0}^{t} b(s) \exp\left(\int_{t}^{s} a(\tau)d\tau\right)ds$$

où $C \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$.

Sans spécifier plus (voir plus loin problème de Cauchy), peu importe le choix de t_0. Avec un problème de Cauchy, on sera amené à fixer de manière unique C si on vous donne t_0 et y_0.

Exemple 2

$y' + y = \cos(t)$

Recherche de y_H : $y_H(t) = C\exp(-t)$

Recherche de y_P : $y_P(t) = C(t)\exp(-t)$. On trouve en refaisant le calcul précédent :

$$C'(t)\exp(-t) = \cos(t) \;\Rightarrow\; C(t) = \int_{t_0}^{t} \cos(s)e^s ds.$$

Conclusion : en faisant deux intégrations par parties (voir ci-après) on trouve que

$$C(t) = \frac{e^t\cos t + e^t \sin t}{2} \;\Rightarrow\; y_P(t) = \frac{\cos t + \sin t}{2}$$

d'où

$$y(t) = C\exp(-t) + \frac{\cos t + \sin t}{2}$$

Faire 2 IPP :

$$\begin{aligned}\int e^t \cos t dt &= [e^t \sin t] - \int e^t \sin t dt \\ &= e^t \sin t - \left([e^t(-\cos t)] - \int -\cos t e^t dt \right) \\ &= e^t(\cos t + \sin t) - \int e^t \cos t dt\end{aligned}$$

d'où

$$2 \int e^t \cos t dt = e^t(\cos t + \sin t)$$

Recherche de solutions particulières

On considère $a, \omega \in \mathbb{R}$, $P(t)$ un polynôme, et l'équation

$$y' + ay = P(t)\exp(\omega t).$$

Pour la solution particulière, on cherche les solutions de cette manière (à retenir par coeur) :

$$y_P(t) = Q(t)\exp(\omega t)$$

avec $deg(Q) = deg(P)$ si $\omega + a \neq 0$ et $deg(Q) = deg(P) + 1$ si $\omega + a = 0$.

Il faut appliquer la méthode pour la retenir !

Exemple 1

- $y' + 2y = t\exp(-t)$ d'où on cherche

$$y_P(t) = (at+b)\exp(-t)$$

.....procéder par identification pour trouver

$$y_P(t) = (t-1)\exp(-t)$$

En effet :

$$y_P' + 2y_P = (at+a+b)\exp(-t)$$

d'où $a = 1$ et $b = -1$.

Exemple 2

- $y' + 2y = \exp(-2t)$

d'où on cherche

$$y_P(t) = (at + b)\exp(-2t)$$

ce qui donne

$$y_P' + 2y_P = a\exp(-2t)$$

d'où on peut prendre $b = 0$ et $a = 1$. Ainsi :

$$y_P(t) = t\exp(-2t)$$

Problème de Cauchy

Definition

Un problème de Cauchy est une équation différentielle linéaire non-homogène de degré 1 couplé d'une condition initiale à un instant t_0 donné :

$$y' + a(t)y = b(t), \quad y(t_0) = y_0.$$

où $a, b : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues, $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

Proposition

Ce problème admet exactement une seule et unique solution y telle que $y(t_0) = y_0$.

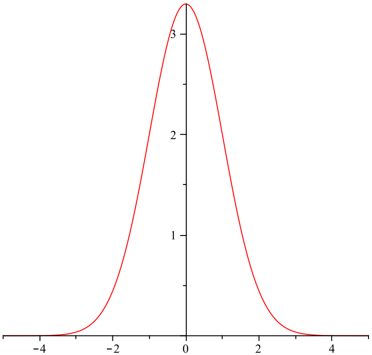
Exemple

Soit le problème de Cauchy

$$y' + ty = 0, \; y(1) = 2$$

- Solution générale $y(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}$
- Solution du problème de Cauchy : $Ce^{-1/2} = 2 \Rightarrow C = 2e^{1/2}$

$$y(t) = 2e^{-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}}$$



Résoudre le problème de Cauchy

$$y' + y = t, \quad y(1) = 2$$

On trouve (chercher $y_P(t) = at + b$ ce qui donne $y_P' + y_P = at + a + b = t$ d'où

$$y_H(t) = \exp(-t)\ ;\ y_P(t) = t - 1 \ \Rightarrow y(t) = C\exp(-t) + t - 1$$

On trouve la constante C : $y(1) = C/e = 2$ d'où $C = 2e$. Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy est :

$$y(t) = 2e\exp(-t) + t - 1$$

Principe de superposition

A plusieurs reprises, on a cherché une solution particulière en deux étapes lorsque le second membre $b(t)$ est de la forme

$$b(t) = b_1(t) + b_2(t)$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition

(Principe de superposition) Soient les équations

$$(E) \quad y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t);$$

$$(E_1) \quad y' + a(t)y = b_1(t) \quad \text{et} \quad (E_2) \quad y' + a(t)y = b_2(t).$$

Si y_1 est une solution de (E_1) et y_2 est une solution de (E_2), alors $y_1 + y_2$ est une solution de (E).

A faire

Faire les exercices de la feuille 3 : exercice 1, 2, 4, 5, 7.

Bon courage !