Université d'Avignon - UFR-ip Sciences | Année 2019-2020

L1 Physique-chimie | UE Math 2

Feuille d'exercices 3

Exercice 1. Donner l'allure des courbes intégrales de l'équation $y' = 5y$.

Exercice 2. Résoudre $y' + e^t y = e^t$. Donner l'allure des courbes intégrales.

Exercice 3. Montrer que toute solution de l'équation différentielle homogène $y' + a(t)y = 0$ soit est nulle, soit ne s'annule jamais.

Exercice 4. Résoudre l'équation $y' - y = t^2 + \sin t$ et l'équation $y' = (1 + \sin t)y$.

Exercice 5. Résoudre $my' - y = e^{2t}$ où $m \in \mathbb{R}$ (distinguer si $m = 1/2$ et $m \neq 1/2$).

Exercice 6. Trouver une solution polynomiale de l'équation $(E) \quad y' + ty = t^2 + t + 1$.
En déduire l'expression de la solution générale de (E).
Donner l'allure de ses courbes intégrales.

Exercice 7. Résoudre les problèmes de Cauchy

- $y' + y = 0$, $y(0) = 1$;
- $y' + y = 0$, $y(0) = 0$.

Exercice 8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. $y'' - 2y' + 5y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
3. $y'' - 4y = 0$.
4. $y'' + 4y = 0$.

Exercice 9. Résoudre $(t^2 + 1)y' + ty = 0$.

Exercice 10. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + 4y = \sin(2t)$.
2. $y'' - 2y' + 5y = e^t \sin(2t) + \cos t$

Exercice 11. Résoudre le problème de Cauchy suivant.

$$y'' + y' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Exercice 12. Résoudre $yy' = xy^2 + 1$ (poser $z = y^2$; puis trouver y une fois qu'on a résolu en z).

Exercice 13.Résoudre sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'équation

$$y' - \tan(t)y = \frac{1}{1+\cos t}.$$

Exercice 14. Le mouvement d'un système mobile autour d'un axe est régi par l'équation différentielle :

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k\frac{d\alpha}{dt} = p\sin 2t.$$

Intégrer cette équation et déterminer l'élongation α en fonction du temps t, sachant que : $J = 0,5$, $k = 1,2$, $p = 0,16$ et que, à l'instant zéro, on a : $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ et $\alpha = 0$.

Exercice 15. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y'' + y = 2\cos t - 4t\sin t$;
- $3y' - y' - 2y = t^2 - t + 3$;
- $y'' + 4y' + 4y = 2e^t - 3e^{-2t}$;
- $y'' + y = 2\cos(t)$.

Exercice 16. Quelles sont les solutions de l'équation $y'' = y'$?

Exercice 17. Résoudre $2y'' - 6y' + 4y = te^{2t}$; $y'' + y = \sin(\omega t)$; $y'' + 2y' = 3te^t$.

Exercice 18. Résoudre $t^2y'' + y = 0$ (poser $z(t) = y(e^t)$).

Exercice 19. [Exercice de synthèse / Rappels dans le cas résonance] Soit a, b, c trois réels. On considère l'équation homogène

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

1) Résoudre l'équation lorsque $b = 0$ et exprimer les solutions en fonction de $\omega_0 = \sqrt{c/a}$.
2) On suppose $b > 0$. On pose $b/a = 1/\tau_e$ et $\omega_0 = \sqrt{c/a}$ de sorte que l'équation s'écrit $y'' + \frac{y'}{\tau_e} + \omega_0^2 y = 0$.
a) Donner la forme des solutions lorsque $\tau_e > \frac{1}{2\omega_0}$.
b) On suppose $\tau_e = \frac{1}{2\omega_0}$. Donner la forme des solutions.
c) On suppose $\tau_e < \frac{1}{2\omega_0}$. Donner la forme des solutions.
3) On considère l'équation "forcée" :

$$ay'' + by' + cy = \cos(\omega t).$$

Trouver une solution particulière lorsque $\omega = \omega_0$ et $b = 0$ (on parle de résonance).

Exercice 20. [plus dur] Soit $y(t) = \int_0^t f(s)\sin(t-s)ds$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue. Montrer que $y''+y = f$.