Math II
Licence Physique - Chimie

Térence Bayen

Université d'Avignon

A partir du 17 mars 2020

Chapitre 3 : Partie II

Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Definition

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 l'équation

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \qquad (E_{NH})$$

où $a, b, c, d : I \to \mathbb{R}$ sont des applications continues définies sur un même intervalle I. L'inconnue est la fonction y de classe C^2.

De même qu'à l'ordre 1 (cours précédent) :

- l'équation (E_{NH}) est l'équation différentielle non-homogène (ou équation générale).
- lorsque $d(t) = 0$, on parle de l'équation homogène associée à l'équation différentielle(E_{NH})

Quelques remarques

Bien que dans ce cours nous allons essentiellement étudier le cas où $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ sont des fonctions constantes, il y a une théorie générale pour les solutions de (E_{NH}) :

- Existence de solutions définies sur I
- Propriétés des solutions (dimension de l'espace vectoriel engendré par les solutions), Wronskien...
- MAIS : contrairement à l'ordre 1, on ne peut en général pas calculer explicitement les solutions de (E_{NH}).

Dans la suite on supposera que $a(t)$, $b(t)$, et $c(t)$ sont des fonctions CONSTANTES :

$$a(t) = a\ ;\ b(t) = b\ ;\ c(t) = c.$$

Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Definition

On appelle équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficient constant l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{E_H}$$

où a, b, c, sont trois nombres réels (avec $a \neq 0$). L'inconnue est la fonction y de classe C^2.

- Caractère homogène : car le second membre $= 0$
- $a \neq 0$ (sinon on a une EDO d'ordre 1 ! ! !)
- Intervalle de définition : ici $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car le second membre est 0.

Equation caractéristique

Definition

L'équation caractéristique associée à E_H est l'équation du second degré (rappelons que $a \neq 0$) :

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{E_c}$$

Rappel : soit $\Delta := b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$ (racine double)
- $\Delta < 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Proposition

1. *si* $\Delta > 0$ *et* α, β *sont les deux racines réelles de* (E_c), *les solutions réelles de* (E_H) *sont de la forme*
$$t \mapsto Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t},$$
2. *si* $\Delta = 0$ *et* α *est la racine double de* (E_c), *les solutions réelles de* (E_H) *sont de la forme*
$$t \mapsto (A + Bt)e^{\alpha t},$$
3. *si* $\Delta < 0$ *et* $r \pm is$ *sont les deux racines complexes de* (E_c), *les solutions réelles de* (E_H) *sont de la forme*
$$t \mapsto (A\cos(st) + B\sin(st))e^{rt},$$

où $A, B \in \mathbb{R}$.

Exemple 1

$$y'' + y' + y = 0$$

- Equation caractéristique : $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$
- Solutions :

$$y(t) = \left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]e^{-\frac{t}{2}}$$

où $A, B \in \mathbb{R}$.

Exemple 2

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

- Equation caractéristique : $x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2, -1$
- Solutions :

$$y(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$$

où $A, B \in \mathbb{R}$.

Exemple 3

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

- Equation caractéristique : $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ (racine double).
- Solutions :
$$y(t) = (At + B)e^{2t}$$

où $A, B \in \mathbb{R}$.

Un cas particulier du cas général

On peut retenir la méthode suivante pour cette équation où il n'y a pas de terme devant y' :

$$y'' + ky = 0, \quad k \in \mathbb{R}$$

- $k = 0 \Rightarrow y(t) = At + B$
- $k < 0 \Rightarrow k = -\omega^2$ (où $\omega > 0$) $\Rightarrow$

  $$y(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

- $k > 0 \Rightarrow k = \omega^2 \Rightarrow$ equation caractéristique $x^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow$ $x = \pm i\omega$ et

  $$y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

où $A, B \in \mathbb{R}$.

Avec second membre

Definition

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants non-homogène l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = d(t) \qquad (E_{NH})$$

où $d : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue définie sur un intervalle I.

On cherchera des solutions y définies sur I

Théorème

Les solutions $y(t)$ de (E_{NH}) s'écrivent

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t), \quad t \in I,$$

où y_H est solution de l'équation homogène associée et y_P est une solution particulière de l'équation (E_{NH}).

Méthode : principe de superposition

Proposition

Soient $d_1, d_2 : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues et soit*

$$\begin{array}{ll} (E_{NH}) & ay'' + by' + cy = d_1(t) + d_2(t) \\ (E_1) & ay'' + by' + cy = d_1(t) \\ (E_2) & ay'' + by' + cy = d_2(t). \end{array}$$

Si y_1 *est une solution de* (E_1) *et* y_2 *est une solution de* (E_2), *alors* $y_1 + y_2$ *est une solution de* (E_{NH}).

Comme à l'ordre 1, vous retenez qu'il faut chercher SEPAREMENT des solutions particulières lorsque le second membre est une somme de plusieurs fonctions.

Méthode pour une solution particulière (dans $\mathbb{R}$)

Proposition

Soient $a, b, c, \omega \in \mathbb{R}$*,* $a \neq 0$*, et* S *un polynome réel. Alors l'équation*

$$ay'' + by' + cy = S(t)e^{\omega t}$$

admet sur $\mathbb{R}$ *une solution particulière de la forme* $t \mapsto T(t)e^{\omega t}$ *où* T *est un polynôme à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *tel que*

1. $\deg(T) = \deg(S)$ *si* ω *n'est pas racine de l'équation caractéristique.*
2. $\deg(T) = \deg(S) + 1$ *si* ω *est racine simple de l'équation caractéristique.*
3. $\deg(T) = \deg(S) + 2$ *si* ω *est racine double de l'équation caractéristique.*

Exemple 1

Soit l'équation

$$y'' - 3y' + 2y = t$$

Les solutions de l'équation sont les fonctions

$$t \mapsto \frac{2t+3}{4} + Ae^t + Be^{2t}$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$. En effet, l'équation caractéristique est $x^2 - 3x + 2 = 0$ d'où la solution de l'équation homogène est :

$$y_H(t) = Ae^t + Be^{2t}$$

puis on cherche $y_P(t) = at + b$ (car $\omega = 0$). On met dans l'équation : $y_P'' - 3y_P' + 2y_P = 0$ qui donne

$$\forall t \in \mathbb{R},\ -3a + 2at + 2b = t$$

Conclusion : $a = 1/2 \text{ et } 2b - 3a = 0$ *i.e.* $b = 3/4$.

Exemple 2

Soit l'équation

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2t}$$

Les solutions de l'équation sont les fonctions

$$t \mapsto te^{2t} + Ae^{t} + Be^{2t}$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$. En effet, (cf exemple 1), on a $y_H(t) = Ae^t + Be^{2t}$.

Puis, on cherche $y_P(t) = (at + b)e^{2t}$ d'où $y_P' = (2at + a + 2b)e^{2t}$, $y_P'' = (4at + 4a + 4b)e^{2t} \Rightarrow$ on forme l'équation et on trouve a par identification (b est quelconque) :

$$y_P'' - 3y_P' + 2y_P = (4a + 4b - 3a - 6b + 2b)e^{2t} = ae^{2t} = e^{2t},\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Conclusion : $a = 1$; b quelconque ($b = 0$ le plus simple).

Exemple 3

Soit l'équation

$$y'' - 3y' + 2y = te^t$$

Les solutions de l'équation sont les fonctions

$$t \mapsto -\left(\frac{t^2}{2} + t\right) e^t + Ae^t + Be^{2t}$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$. En effet, on cherche y_P sous la forme :

$$\begin{aligned} y_P(t) &= (at^2 + bt + c)e^t \\ y_P'(t) &= (at^2 + (b + 2a)t + b + c)e^t \\ y_P''(t) &= (at^2 + (4a + b)t + 2a + 2b + c)e^t \qquad \Rightarrow \end{aligned}$$

en formant l'équation

$$y_P'' - 3y_P' + 2y_P = (-2at + 2a - b)e^t = te^t \Rightarrow$$

$-2a = 1$, $2a - b = 0$ et donc $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -1$.

Recherche d'autres solutions particulières

Il arrive souvent en physique (électricité, ressort,...) de devoir chercher une solution particulière de l'équation

$$ay'' + by' + cy = S(t)e^{rt} \times \underbrace{\cos \omega t}_{\text{terme d'excitation}}$$

ou bien de

$$ay'' + by' + cy = S(t)e^{rt} \sin \omega t$$

où $a, b, c, r, \omega \in \mathbb{R}$. L'idée est d'introduire l'équation dans $\mathbb{C}$

$$ay'' + by' + cy = S(t)e^{rt+i\omega t}$$

et de résoudre dans $\mathbb{C}$. On a alors le résultat suivant (même idée que la proposition précédente).

Proposition

Soient $a, b, c, \omega \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, *et* S *un polynôme réel. Alors l'équation*

$$ay'' + by' + cy = S(t)e^{(r+i\omega)t}$$

admet sur $\mathbb{C}$ *une solution particulière de la forme* $t \mapsto T(t)e^{(r+i\omega)t}$ *où* T *est un polynôme à coefficients dans* $\mathbb{C}$ *tel que*

1. $\deg(T) = \deg(S)$ *si* $r + i\omega$ *n'est pas racine de l'équation caractéristique.*
2. $\deg(T) = \deg(S) + 1$ *si* $r + i\omega$ *est racine simple de l'équation caractéristique.*
3. $\deg(T) = \deg(S) + 2$ *si* $r + i\omega$ *est racine double de l'équation caractéristique.*

Remarques sur la proposition précédente

- La solution y est à valeur dans $\mathbb{C}$! ! !
- Notez que l'on regarde si le nombre complexe $r + i\omega$ est solution de l'équation caractéristique !

Comment obtient-on les solutions réelles ? ?

On a trouvé une solution $y_P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de

$$ay_P'' + by_P' + cy_P = S(t)e^{(r+i\omega)t}$$

qui s'écrit $y_P(t) = T(t)e^{(r+i\omega)t}$. ATTENTION, T est à valeurs dans $\mathbb{C}$. On veut une solution réelle. Alors,

$$\mathrm{Re}(T(t)e^{(r+i\omega)t}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(T(t)e^{(r+i\omega)t})$$

sont respectivement solutions de

$$ay_P'' + by_P'' + cy_P = S(t)e^{rt}\cos(\omega t)$$

et

$$ay_P'' + by_P'' + cy_P = S(t)e^{rt}\sin(\omega t)$$

Exemple

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2t} \sin t$$

- Equation caractéristiques : $x^2 + 4x + 5 = 0 \Rightarrow$ solutions

$$x = -2 \pm i$$

- D'où $y_H(t) = e^{-2t}(A \cos t + B \sin t)$
- Solution particulière : on la cherche dans $\mathbb{C}$ sous la forme

$$y_P(t) = \alpha t e^{(i-2)t}$$

et oui, $i - 2$ est solution de l'équation caractéristique, il faut donc augmenter le degré de 1. Notez que l'on prend 0 le coefficient de degré 0 car on sait que $t \mapsto e^{(i-2)t}$ est solution de (E_H) ! ! !

Exemple (suite)

On cherche donc dans $\mathbb{C}$ une solution particulière de

$$y'' + 4y' + 5y = e^{(i-2)t}$$

$$y_P(t) = \alpha t e^{(i-2)t}$$
$$y_P'(t) = \alpha[1 + (i-2)t]e^{(i-2)t}$$
$$y_P''(t) = \alpha[i - 2 + (1 + (i-2)t)(i-2)]e^{(i-2)t} \Rightarrow$$

$$y_P''(t) + 4y_P'(t) + 5y_P(t) = \cdots = i2\alpha e^{(i-2)t} = e^{(i-2)t} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}.$$

Conclusion : $y_P(t) = -\frac{it}{2}e^{(i-2)t}$ en complexe. Pour avoir la solution réelle, on prend la partie imaginaire (regardez l'équation, il y a un sinus) :

$$\tilde{y}_P(t) = \mathrm{Im}(y_P(t)) = \mathrm{Im}(-\frac{it}{2}e^{(i-2)t}) = -\frac{t}{2}e^{-2t}\mathrm{Im}(ie^{it}) = -\frac{t}{2}e^{-2t}\cos t$$

Exemple (suite)

En conclusion de la conclusion : la solution générale de l'équation

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2t} \sin t$$

s'écrit :

$$y_G(t) = \underbrace{e^{-2t}(A\cos t + B\sin t)}_{homogene} \underbrace{- \frac{t}{2} e^{-2t} \cos t}_{particuliere}$$

- Je vous conseille de regarder le polycopié p.14 pour un autre exemple portant sur le phénomène de résonance (lorsqu'un système est excité avec sa fréquence propre $\Rightarrow$ EXPLOSION (oscillateur sans frottement)

Problème de Cauchy

Retournons à l'équation

$$ay'' + by' + cy = d(t) \qquad (E_{NH})$$

où $d : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue définie sur un intervalle I, et $a, b, c, \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On va chercher A et B à l'aide des conditions initiales (fixées à l'avance).

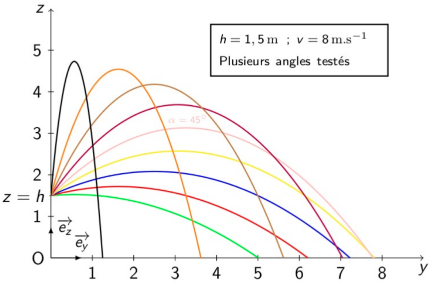
Proposition

Soit $t_0 \in I$, y_0, y_0' deux réels. Alors il existe une seule et unique solution de (E_{NH}) telle que

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'$$

(Ceci revient à prescrire la position et la vitesse à l'instant initial t_0 de l'expérience).

Explication physique du problème de Cauchy



- Le problème de Cauchy permet de déterminer les deux constantes A et B en résolvant un système de deux équations à deux inconnues.
- Physiquement, on se donne la position initiale (ci-dessous, le point $(0, h)$) et la vitesse initiale (angle du vecteur vitesse θ_0 + module de la vitesse v_0)

Explication physique du problème de Cauchy

- PFD : $m\vec{\gamma} = -\vec{g}$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -g \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\theta_0 \\ \dot{y} = v_0 \sin\theta_0 - \frac{gt}{m} \end{cases}$$

- Equations horaires :

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\theta_0)t \\ y(t) = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{gt^2}{2m} + h \end{cases}$$

<u>Conclusion</u> : prescrire les conditions initiales est important dans de nombreux problèmes physiques.

Exemple 1

$$y'' - 3y' + 2y = t, \quad y(0) = y'(0) = 1$$

- Equation caractéristique $x^2 - 3x + 2 = 0$. D'où $x = 1, 2$ et
$$y_H(t) = Ae^t + Be^{2t}$$
- Solution particulière : $y_P(t) = at + b$ (par ce qui précède, $\omega = 0$). D'où $-3a + 2(at + b) = t$ pour tout t. Par identification : $a = 1/2$, $b = 3/4$ et $y_P(t) = \frac{2t+3}{4}$.
- Solution générale :
$$y(t) = Ae^t + Be^{2t} + \frac{2t+3}{4}$$
Il vient $A + B + 3/4 = 1$ et $A + 2B + 1/2 = 1$ ce qui donne $B = 1/4$, $A = 0$. Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy est
$$y(t) = \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{2t+3}{4}$$

A vous de jouer

1. il y a d'autres exemples de problèmes de Cauchy dans le polycopié de cours.
2. Exercices sur les EDO du second ordre :

   Exercices 9, 10, 11, 15, 16

Equation du ressort

Soit un poids de masse m, attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 immergé dans un liquide. On néglige la poussée d'Archimède et on modélise l'action du milieu liquide sur le poids par une force de frottement fluide (de la forme $\vec{f} = -2\mu\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la bille et $\mu \geq 0$).

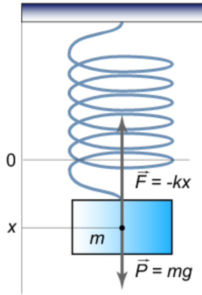
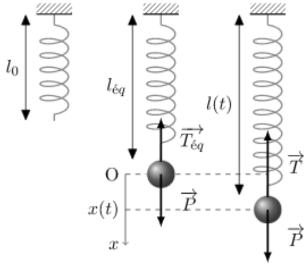


Figure 1.

On choisit l'extrémité de fixation du ressort comme origine O et on note $\vec{u}$ le vecteur unitaire qui dirige la verticale descendante. La position de la bille à l'instant t sera repérée à l'instant t par sa position $y(t)$ dans le repère $(O, \vec{u})$. L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$my''(t)\vec{u} = -k(y(t) - \ell_0)\vec{u} - 2\mu y'(t)\vec{u} + mg\vec{u}.$$



$$my''(t)\vec{u} = -k(y(t) - \ell_0)\vec{u} - 2\mu y'(t)\vec{u} + mg\,\vec{u}.$$

A l'équilibre, cette équation s'écrit

$$\vec{0} = -k(\ell_e - \ell_0)\vec{u} + mg\,\vec{u};$$

en faisant la différence des deux équations et en posant $y_e(t) = y(t) - \ell_e$ (c-à-d qu'on se repère par rapport à la position d'équilibre ℓ_e), on obtient l'équation

$$my_e''(t) + 2\mu y_e'(t) + ky_e(t) = 0.$$

Si on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\lambda = \frac{\mu}{m\omega_0}$, on veut donc résoudre l'équation

$$y''(t) + 2\lambda\omega_0 y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0.$$

- Dans le cas d'un frottement non négligeable (c-à -d $\lambda > 0$, c-à -d $\mu > 0$), on parle d' $\boxed{\textit{oscillateur amorti}}$.
- Quand $\lambda = 0$, on parle d' $\boxed{\textit{oscillateur non amorti}}$.
- ω_0 : pulsation propre.

Pas de frottement $\lambda = 0$

$$y'' + \omega_0^2 y = 0$$

$x^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow x = \pm i\omega_0 \Rightarrow$

1. $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b)$

Pas de frottement $\lambda = 0$

$$y'' + \omega_0^2 y = 0$$

$x^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow x = \pm i\omega_0 \Rightarrow$

$$y(t) = C\cos(\omega_0 t - \phi)$$

??

1. $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b)$

Pas de frottement $\lambda = 0$

$$y'' + \omega_0^2 y = 0$$

$$x^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow x = \pm i\omega_0 \Rightarrow$$

$$y(t) = C\cos(\omega_0 t - \phi)$$

??En fait, on a vu que[1] :

$$\begin{aligned}
y(t) &= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \\
&= \underbrace{\sqrt{A^2+B^2}}_{:=C}\left[\underbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\cos\phi}\cos\omega_0 t + \underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\sin\phi}\sin\omega_0 t\right] \\
&= C[\cos\phi\cos\omega_0 t + \sin\phi\sin\omega_0 t] \\
&= C\cos(\omega_0 t - \phi)
\end{aligned}$$

1. $\cos a\cos b + \sin a\sin b = \cos(a-b)$

Avec frottement $0 < \lambda < 1$: oscillateur faiblement amorti

$$y''(t) + 2\lambda\omega_0 y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0.$$

Equation caractéristique : $x^2 + 2\lambda\omega_0 x + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = 4\omega_0^2(\lambda^2 - 1) < 0$$

$$x = \omega_0[-\lambda \pm i\sqrt{1-\lambda^2}]$$

Avec frottement $0 < \lambda < 1$: oscillateur faiblement amorti

$$y''(t) + 2\lambda\omega_0 y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0.$$

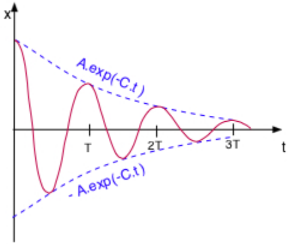
Equation caractéristique : $x^2 + 2\lambda\omega_0 x + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = 4\omega_0^2(\lambda^2 - 1) < 0$$

$$x = \omega_0[-\lambda \pm i\sqrt{1-\lambda^2}]$$

$$y(t) = \left[A\cos(\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}\,t) + B\sin(\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}\,t)\right] e^{-\lambda\omega_0 t} \to 0$$

$\Rightarrow$ AMORTISSEMENT (avec oscillations)



Avec frottement $\lambda > 1$

Oscillateur très amorti (pas d'oscillation)

$$x^2 + 2\lambda\omega_0 x + \omega_0^2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = (-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})\omega_0 < 0 \\ x_2 = (-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})\omega_0 < 0 \end{cases}$$

$$y(t) = Ae^{x_1 t} + Be^{x_2 t} \to 0$$

quand $t \to +\infty$

Oscillateur forcé

Nous sommes maintenant en mesure d'expliquer les phénomènes observés lors des expériences sur les oscillations mécaniques entretenues. L'équation générale d'une grandeur physique $y(t)$ soumise à des oscillations forcées s'écrit

$$(E) \quad y'' + 2\lambda\omega_0 y' + \omega_0^2 y = F\cos(\omega t)$$

Pas de frottement : $\lambda = 0$ (et $F = 1$)

$$y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega t)$$

1) si $\omega = \omega_0$: alors

$$y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{t\sin\omega_0 t}{2\omega_0}$$

Pas de frottement : $\lambda = 0$ (et $F = 1$)

$$y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega t)$$

1) si $\omega = \omega_0$: alors

$$y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{t\sin\omega_0 t}{2\omega_0}$$

L'excitation à la pulsation propre d'un oscillateur non amorti se traduit par une explosion progressive de la réponse du système

Démonstration

Pas de frottement : $\lambda = 0$ (et $F = 1$)

2) $\omega \neq \omega_0$

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{A\cos(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas il y a des oscillations forcées, obtenues par superposition des deux oscillations de fréquences distinctes ω et ω_0, le résultat n'est plus une sinusoïde.

Pas de frottement : $\lambda = 0$ (et $F = 1$)

2) $\omega \neq \omega_0$

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{A\cos(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas il y a des oscillations forcées, obtenues par superposition des deux oscillations de fréquences distinctes ω et ω_0, le résultat n'est plus une sinusoïde.
Résonance : si $\omega \to \omega_0$ alors

$$|y(t_n)| \to +\infty$$

i.e. $y(\cdot)$ n'est plus bornée.

Démonstration

frottement : $0 < \lambda < 1$ (et $F = 1$)

$$y''(t) + 2\lambda\omega_0 y'(t) + \omega_0^2 y(t) = \cos\omega t.$$

Equation caractéristique : $x^2 + 2\lambda\omega_0 x + \omega_0^2 = 0$. Soit $\delta := \omega_0\sqrt{1-\lambda^2}$ de sorte que les racines de l'équation caractéristiques s'écrivent

$$x = -\lambda\omega_0 \pm i\delta$$

Solution :

$$y(t) = [A\cos(\delta t) + B\sin(\delta t)]\, e^{-\lambda\omega_0 t} + \frac{\cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2\omega_0^2}}$$

$\Rightarrow$ Oscillations forcées

Démonstration