# Université d'Avignon, Méthodologie
# 2021-2022
## *Feuille n$^o$4: nombres complexes*

**Exercice 1** *Simplifiez les expressions suivantes.*

- $z = (2 - 3i)(3i)$.
- $z = (1 + i)(2 + i)$.
- $z = (2 + 3i)^2 - i$.
- $z = \frac{1-i}{2i}$.
- $z = \frac{(1-i)}{(2+i)} - 2i$.
- *On pose* $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, *calculer* $1 + j + j^2$.

**Exercice 2** *Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique.*

- $z = 3 + 3i$.
- $z = 1 - i$.
- $z = -2 + 2i$.
- $z = 2\sqrt{3} - 2i$.
- $z = \frac{\sqrt{2}}{(1-i)}$.
- $z = (-1 + i)^3 e^{3i\pi/4}$.
- $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$.

**Exercice 3** *Utilisez la formule de De Moivre ainsi que l'identité*

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$$

*pour prouver les formules de trigonométrie suivantes.*

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

**Exercice 4** *Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes.*

- $z^3 = i$.
- $z^4 = 4e^{i\pi/3}$.
- $z^2 - z + 1 = 0$.
- $2z^2 + z - 3 = 0$.
- $z = 2\overline{z}$.
- $z - \overline{z} = i$.
- $z\overline{z} - z - \overline{z} = 3$.

**Exercice 5** *Résoudre le système linéaire suivant dans $\mathbb{C}$.*

$$\begin{cases} z_1 + iz_2 = 2 \\ -iz_1 + 2z_2 = 1 \end{cases}$$

**Exercice 6**

1. *Montrer que pour tout nombres complexes $z_1, z_2$, on a*
$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2.$$
2. *Interpretez cette formule en terme de géométrie du triangle, retrouvez le théorème de Pythagore.*

**Exercice 7** *Cherchez une solution réelle de l'équation*

$$z^4 - z^3 + 3z - 3 = 0,$$

*puis résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$. (Idée: une fois une solution réelle $\alpha$ trouvée, factorisez l'expression par $(z - \alpha)$.)*

**Exercice 8** *Donner une forme trigonométrique à*

$$1 + i\tan(\theta)$$

*pour tout $\theta$ réel, $\theta \neq \frac{\pi}{2} \mod \pi$. En déduire une expression de*

$$(1 + i\sqrt{3})^{12}.$$