

**Université d'Avignon, Méthodologie**  
**2021-2022**

*Feuille n°6: Dérivation et étude des fonctions*

**Exercice 1** Calculez les dérivées des fonctions suivantes, après avoir précisé leur dérivabilité.

- $f : x \mapsto x^2 + 1.$
- $f : x \mapsto x^5 - 2x^4 + 3x^2 - x + 1.$
- $f : x \mapsto \frac{1}{4x^2 - x - 3}.$
- $f : x \mapsto \frac{x-1}{x+1}.$
- $f : x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 1}.$
- $f : x \mapsto \sqrt{2x + 3}.$
- $f : x \mapsto 2 \sin(x) + 3 \cos(x).$
- $f : x \mapsto \sin(2x + 1).$
- $f : x \mapsto \sin(\sqrt{x}) + \cos(x^2).$
- $f : x \mapsto \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3.$
- $f : x \mapsto (\sqrt{x} - 1)^{10}.$
- $f : x \mapsto (\sin(3x + 1))^4.$

**Exercice 2** Montrer que les fonctions suivantes, définies sur  $\mathbb{R}$ , ne sont pas dérivables en  $x = 0$ .

1.  $f(x) = |x|.$
2.  $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

**Exercice 3** Une pierre est lâchée depuis une hauteur de 60m. La distance parcourue par cette pierre au bout de  $t$  secondes est  $5t^2$  (en mètres). Calculez la durée de la chute et la vitesse au moment où la pierre atteint le sol.

**Exercice 4** Pour chacune des fonctions suivantes, étudiez le sens de variation et les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Faire une représentation graphique.

1.  $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ .
2.  $f(x) = \frac{3x-1}{2x-5}$ .
3.  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$ .
4.  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$ .
5.  $f(x) = \frac{x^2+3x+4}{x}$ .
6.  $f(x) = \frac{2x^2-x+1}{x^2+1}$ .

**Exercice 5** Montrez que l'équation  $x^3 - 2x^2 + 4x - 1 = 0$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[-10, +10]$ . Trouver une approximation à  $10^{-1}$  près.

**Exercice 6**

1. On pose  $g(x) = -\frac{3}{2}x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 12x$ . Étudiez son sens de variation.
2. Combien l'équation  $g(x) = 0$  a-t-elle de solutions dans  $[0, 3]$  ?
3. Trouver une approximation à  $10^{-1}$  près de ces solutions.

**Exercice 7** On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \cos^2(x) - \cos(x).$$

1. Montrer que  $f$  est périodique de période  $2\pi$  et que  $f$  est paire.
2. Étudiez les variations de  $f$ .
3. Tracez la courbe représentant  $f$ .

**Exercice 8** On construit une boîte de conserve de forme cylindrique: ce cylindre a pour hauteur  $h$  et le rayon de la base circulaire est  $r$ .

- Exprimez le volume et la surface du cylindre en fonction de  $h, r$ .
- Fixant la surface (notée  $S$ ), exprimez le volume comme fonction de  $r$ ,  $S$  étant un paramètre.
- En déduire les dimensions à donner à la boîte pour maximiser le volume,  $S$  étant fixé.