Fiche du chapitre I - Fonctions de plusieurs variables

En vue d'une utilisation lors de l'examen, ne pas annoter (surligneur et encadrement autorisés)

Une **fonction de plusieurs variables** est une fonction $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, où k et n sont des entiers. On suppose dans la suite que $k = 2$ et $n = 1$, donc $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables. En pratique la plupart des notions introduites se généralisent à des fonctions de $k > 2$ variables.

Dérivées partielles, gradient, interprétation géométrique

✓ Soit (x_0, y_0) un point du domaine de définition de f.

La **dérivée partielle par rapport à la 1ère variable** x au point (x_0, y_0), que l'on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, est le réel $\varphi'(x_0)$, où φ est la fonction (d'une variable réelle) définie par $\varphi(x) = f(x, y_0)$.

De même, la **dérivée partielle par rapport à la 2ème variable** y au point (x_0, y_0), que l'on note $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, est le réel $\psi'(y_0)$, où ψ est la fonction (d'une variable réelle) définie par $\psi(y) = f(x_0, y)$.

Concrètement, pour calculer la dérivée partielle de f par rapport à une variable, on considère que toutes les autres variables sont des constantes, et on dérive par rapport à la variable restante.

✓ Le **vecteur gradient** de f en (x_0, y_0) est le vecteur

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\overrightarrow{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\overrightarrow{\jmath}.$$

✓ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on appelle **ligne de niveau** a l'ensemble L_a de tous les points (x, y) du plan vérifiant $f(x, y) = a$.

Soit A de coordonnées (x_A, y_A) un point de L_a. La tangente en A à la courbe L_a a pour équation

$$(x - x_A)\frac{\partial f}{\partial x}(x_A, y_A) + (y - y_A)\frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A) = 0.$$

Autrement dit c'est la droite passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)(x_A, y_A)$.

✓ La **surface représentative** S de f est l'ensemble de tous les points (x, y, z) de l'espace vérifiant la relation $z = f(x, y)$.

Soit M de coordonnées (x_0, y_0, z_0) un point de S (on a donc $z_0 = f(x_0, y_0)$). Le **plan tangent** à S en M a pour équation cartésienne

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Autrement dit, c'est le plan passant par M de vecteur normal $\overrightarrow{n} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\overrightarrow{\imath} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{k}$.

Vecteur dérivé d'une fonction vectorielle

Si $\overrightarrow{V} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est une fonction définie par $\overrightarrow{V}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, on note $\overrightarrow{V}'$ le **vecteur dérivé** de $\overrightarrow{V}$ (qui existe à la condition que x et y soient des fonctions dérivables) défini par $\overrightarrow{V}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

De même, si $\overrightarrow{V} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ est définie par $\overrightarrow{V}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, on note $\overrightarrow{V}'$ le **vecteur dérivé** de $\overrightarrow{V}$ (qui existe à la condition que x, y et z soient des fonctions dérivables) défini par $\overrightarrow{V}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.

Dérivées partielles d'une fonction composée

✓ Soient trois fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$. La dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = g\Big(h_1(t), h_2(t)\Big)$$

en t_0 se calcule de la manière suivante :

$$f'(t_0) = \frac{\partial g}{\partial x}\Big(h_1(t_0), h_2(t_0)\Big)h_1'(t_0) + \frac{\partial g}{\partial y}\Big(h_1(t_0), h_2(t_0)\Big)h_2'(t_0) = \Big\langle \overrightarrow{\text{grad}}\,(g)(h_1(t_0), h_2(t_0))\,;\, h'(t)\Big\rangle$$

où h' désigne le vecteur dérivé de la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}$.

✓ Soient deux fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Les deux dérivées partielles de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = g\Big(h(x, y)\Big)$$

en (x_0, y_0) se calculent de la manière suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'\Big(h(x_0, y_0)\Big)\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = g'\Big(h(x_0, y_0)\Big)\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0).$$

✓ Soient trois fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $h_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$. Les deux dérivées partielles de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = g\Big(h_1(x, y), h_2(x, y)\Big)$$

en (x_0, y_0) se calculent de la manière suivante (pour éviter les risques de confusion, on note (u, v) les variables de la fonction g) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial u}\Big(h_1(x_0, y_0), h_2(x_0, y_0)\Big)\frac{\partial h_1}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial v}\Big(h_1(x_0, y_0), h_2(x_0, y_0)\Big)\frac{\partial h_2}{\partial x}(x_0, y_0)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial u}\Big(h_1(x_0, y_0), h_2(x_0, y_0)\Big)\frac{\partial h_1}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial v}\Big(h_1(x_0, y_0), h_2(x_0, y_0)\Big)\frac{\partial h_2}{\partial y}(x_0, y_0)$$