TCM – Chapitre 2

Vecteurs et géométrie vectorielle

Université Clermont Auvergne

20 octobre 2020

Notions étudiées :

- coordonnées d'un point, d'un vecteur ;
- vecteurs colinéaires, orthogonaux ;
- produit scalaire ;
- produit vectoriel dans l'espace ;
- droites, plans ;
- projection orthogonale.

Partie I

Géométrie dans le plan

Coordonnées dans le plan

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Le point O est l'origine du repère.

Le couple de vecteurs $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est la base canonique du repère.

Coordonnées dans le plan

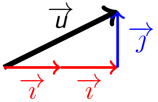
• Si $\vec{u}$ est un vecteur du plan, ses coordonnées dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont les réels x et y tels que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. On note alors $\vec{u}(x, y)$.

Ainsi, les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ ont pour coordonnées $\vec{\imath}(1, 0)$ et $\vec{\jmath}(0, 1)$.

• Si A est un point du plan, ses coordonnées (x_A, y_A) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on note $A(x_A, y_A)$.

• Si les points A et B ont pour coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Coordonnées dans le plan



$$\vec{u} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$$

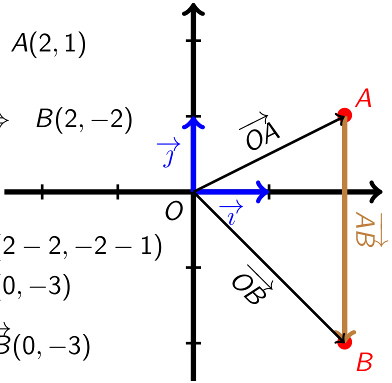
$$\vec{u}(2,1)$$

$$\overrightarrow{OA}(2,1) \implies A(2,1)$$

$$\overrightarrow{OB}(2,-2) \implies B(2,-2)$$

$$\begin{aligned}(x_B - x_A, y_B - y_A) &= (2-2, -2-1)\\ &= (0,-3)\end{aligned}$$

$$\implies \overrightarrow{AB}(0,-3)$$



Vecteurs colinéaires

Vecteurs colinéaires

• Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ (ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$).

• Deux vecteurs $\vec{u}(x_1, y_1)$ et $\vec{v}(x_2, y_2)$ sont colinéaires si et seulement si

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0.$$

• Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, et donc si

$$(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A) = 0.$$

Les vecteurs $\vec{u}(2, -1)$ et $\vec{v}(-4, 2)$ sont colinéaires car $\vec{v} = -2\vec{u}$.

Les vecteurs $\vec{u}(1, 2)$ et $\vec{v}(3, 4)$ ne sont pas colinéaires car

$$1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vecteurs orthogonaux et produit scalaire

Produit scalaire et norme

- Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}(x_1, y_1)$ et $\overrightarrow{v}(x_2, y_2)$ est le réel

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

- La norme du vecteur $\overrightarrow{u}(x, y)$ est le réel positif

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- La distance entre les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ est $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}(3, 4)$ et $\overrightarrow{v}(8, -6)$ sont orthogonaux car

$$\color{red}{3} \cdot \color{red}{8} + \color{blue}{4} \cdot (\color{blue}{-6}) = 0.$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \color{red}{3} \\ \color{blue}{4} \end{pmatrix} \begin{matrix} \color{red}{\longrightarrow} \\ \color{blue}{\longrightarrow} \end{matrix} \begin{pmatrix} \color{red}{8} \\ \color{blue}{-6} \end{pmatrix}}$$

Base orthonormée

Base orthonormée

• Un couple de vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ forme une base orthonormée si $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont unitaires et orthogonaux, c'est-à-dire si

$$\|\overrightarrow{e_1}\| = 1, \ \|\overrightarrow{e_2}\| = 1, \qquad \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle = 0.$$

• Si $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base orthonormée, on peut identifier les coordonnées de tout vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ avec la relation

$$\overrightarrow{u} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_1} \rangle \, \overrightarrow{e_1} + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_2} \rangle \, \overrightarrow{e_2}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ forment bien une base orthonormée car

$$\|\overrightarrow{\imath}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \ \|\overrightarrow{\jmath}\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1, \ \langle \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath} \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Normalisation d'un vecteur

À tout vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul, on peut associer le vecteur $\overrightarrow{v} = \pm \dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$, unitaire et colinéaire à $\overrightarrow{u}$.

Exercice 1

On considère les points $A(1,0)$, $B(2,1)$ et les vecteurs suivants,

$$\overrightarrow{u_1}(1,2), \quad \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}, \quad \overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{u_4} = 3\overrightarrow{u_3} - \overrightarrow{u_2}.$$

- Le vecteur $\overrightarrow{u_2}$ a pour coordonnées $(1,-1)$.
- Le vecteur $\overrightarrow{u_3}$ a pour coordonnées

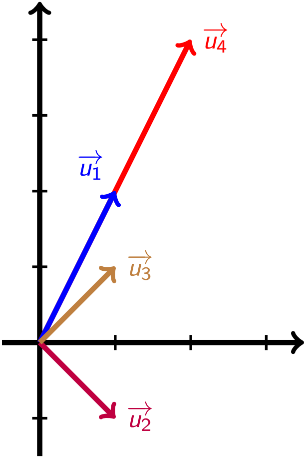
$$(x_B - x_A, y_B - y_A) = (2-1, 1-0) = (1,1).$$

- Le vecteur $\overrightarrow{u_4}$ a pour coordonnées

$$\begin{aligned} 3(x_3, y_3) - (x_2, y_2) &= (3x_3, 3y_3) - (x_2, y_2) \\ &= (3x_3 - x_2, 3y_3 - y_2) \\ &= (3 \cdot 1 - 1, 3 \cdot 1 - [-1]) = (2,4). \end{aligned}$$

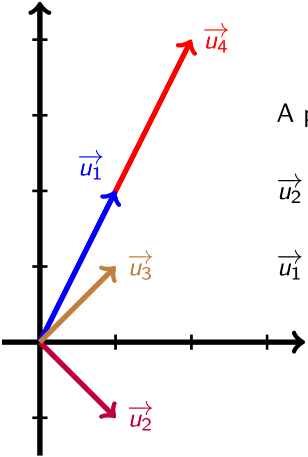
Exercice 1

$$\overrightarrow{u_1}(1,2),\quad \overrightarrow{u_2}(1,-1),\quad \overrightarrow{u_3}(1,1),\quad \overrightarrow{u_4}(2,4)$$



Exercice 1

$$\overrightarrow{u_1}(1,2), \quad \overrightarrow{u_2}(1,-1), \quad \overrightarrow{u_3}(1,1), \quad \overrightarrow{u_4}(2,4)$$



A priori,

$\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ sont orthogonaux,

$\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_4}$ sont colinéaires.

Exercice 1

$$\overrightarrow{u_1}(1,2), \quad \overrightarrow{u_2}(1,-1), \quad \overrightarrow{u_3}(1,1), \quad \overrightarrow{u_4}(2,4)$$

$$\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -1$$

$$\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3} \rangle = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

$$\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_4} \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 10$$

$$\langle \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3} \rangle = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0$$

$$\langle \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_4} \rangle = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 = -2$$

$$\langle \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4} \rangle = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 6$$

On constate donc bien que les vecteurs $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ sont orthogonaux.

Exercice 1

$$\overrightarrow{u_1}(1,2), \quad \overrightarrow{u_2}(1,-1), \quad \overrightarrow{u_3}(1,1), \quad \overrightarrow{u_4}(2,4)$$

On remarque que $\overrightarrow{u_4} = 2\overrightarrow{u_1}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_4}$ sont donc bien colinéaires.

Ni $\overrightarrow{u_2}$, ni $\overrightarrow{u_3}$ ne sont colinéaires à $\overrightarrow{u_1}$ (et donc à $\overrightarrow{u_4}$). En effet,

$$1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -3 \neq 0,$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}$$

$$1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -1 \neq 0.$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$$

Exercice 1

$$\overrightarrow{u_1}(1,2), \quad \overrightarrow{u_2}(1,-1), \quad \overrightarrow{u_3}(1,1), \quad \overrightarrow{u_4}(2,4)$$

Pour obtenir un vecteur $\overrightarrow{v}$ unitaire (i.e. de norme 1) et colinéaire à un vecteur $\overrightarrow{u}$, il suffit de diviser $\overrightarrow{u}$ par sa norme. On a alors deux choix, $\overrightarrow{v} = \pm\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$.

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{v_1} = \dfrac{\overrightarrow{u_1}}{\|\overrightarrow{u_1}\|}$ est unitaire et colinéaire à $\overrightarrow{u_1}$.

$$\|\overrightarrow{u_1}\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}, \quad \tfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2) = (\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}) \implies \overrightarrow{v_1}(\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}})$$

De même,

$$\|\overrightarrow{u_2}\| = \sqrt{2}, \quad \overrightarrow{v_2} = \frac{\overrightarrow{u_2}}{\|\overrightarrow{u_2}\|}, \quad \overrightarrow{v_2}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}),$$

$$\|\overrightarrow{u_3}\| = \sqrt{2}, \quad \overrightarrow{v_3} = \frac{\overrightarrow{u_3}}{\|\overrightarrow{u_3}\|}, \quad \overrightarrow{v_3}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}),$$

$$\|\overrightarrow{u_4}\| = 2\sqrt{5}, \quad \overrightarrow{v_4} = \frac{\overrightarrow{u_4}}{\|\overrightarrow{u_4}\|}, \quad \overrightarrow{v_4}(\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}).$$

Exercice 1

$$\overrightarrow{u_1}(1,2), \quad \overrightarrow{v_2}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}), \quad \overrightarrow{v_3}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}), \quad \overrightarrow{u_4}(2,4)$$

Le couple de vecteurs $(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ forme une base orthonormée. En effet,

$$\|\overrightarrow{v_2}\| = \|\overrightarrow{v_3}\| = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}} = 1, \quad \langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \rangle = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 0.$$

On identifie les coordonnées de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_4}$ dans la base $(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ grâce aux relations

$$\overrightarrow{u_1} = \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle \, \overrightarrow{v_2} + \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_3} \rangle \, \overrightarrow{v_3}, \quad \overrightarrow{u_4} = \langle \overrightarrow{u_4}, \overrightarrow{v_2} \rangle \, \overrightarrow{v_2} + \langle \overrightarrow{u_4}, \overrightarrow{v_3} \rangle \, \overrightarrow{v_3}.$$

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_3} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases} \implies \overrightarrow{u_1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \overrightarrow{v_2} + \frac{3}{\sqrt{2}} \overrightarrow{v_3}$$

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{u_4}, \overrightarrow{v_2} \rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \langle \overrightarrow{u_4}, \overrightarrow{v_3} \rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \end{cases} \implies \overrightarrow{u_4} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \overrightarrow{v_2} + \frac{6}{\sqrt{2}} \overrightarrow{v_3}$$

Exercice 1

$$\overrightarrow{u_1}(1,2), \quad \overrightarrow{v_2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \overrightarrow{v_3}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \overrightarrow{u_4}(2,4)$$

Un vecteur $\overrightarrow{w}(x,y)$ est orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$ si et seulement si

$$\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u_1} \rangle = x + 2y = 0.$$

Ainsi, $x = -2y$ et $\overrightarrow{w}$ est de la forme $\overrightarrow{w}(-2y, y)$, pour y réel.

Si l'on requiert en plus que $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u_1}$ soient de même norme, il vient

$$\|\overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{u_1}\| \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{5y^2} = \sqrt{5} \quad \Longrightarrow \quad 5y^2 = 5$$

$$\Longrightarrow \quad y^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = 1 \text{ ou } y = -1.$$

Ainsi, $\overrightarrow{w}(-2,1)$ ou $\overrightarrow{w}(2,-1)$.

Exercice 5

On considère les vecteurs $\vec{u}(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ et $\vec{v}(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$.

Le couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ forme une base orthonormée. En effet,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1,$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{3}{5} \cdot (-\frac{4}{5}) + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{12}{25} + \frac{12}{25} = 0.$$

On identifie les coordonnées de $\vec{w}(-2, 1)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ grâce à la relation

$$\vec{w} = \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle \, \vec{u} + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle \, \vec{v}.$$

$$\begin{cases} \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = (-2) \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{2}{5} \\ \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = (-2) \cdot (-\frac{4}{5}) + 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{11}{5} \end{cases} \Longrightarrow \quad \vec{w} = -\frac{2}{5}\vec{u} + \frac{11}{5}\vec{v}$$

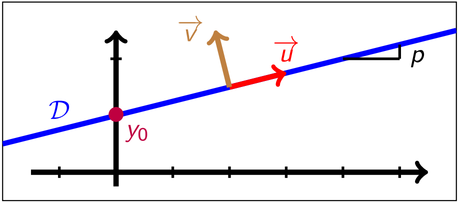
Les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ sont donc $(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5})$.

Équation cartésienne d'une droite

Soit $\mathcal{D}$ une droite. Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est une relation du type $ax + by + c = 0$.

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \quad \Longleftrightarrow \quad ax + by + c = 0$$

- Le vecteur $\vec{u}(-b, a)$ est alors un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
- Le vecteur $\vec{v}(a, b)$ est alors un vecteur normal à $\mathcal{D}$.
- Si $b \neq 0$, l'équation cartésienne peut s'écrire $y = px + y_0$, où $p = -\frac{a}{b}$ est la pente de $\mathcal{D}$ et $y_0 = -\frac{c}{b}$ l'ordonnée à l'origine.



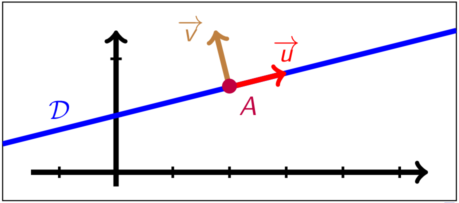
Équation paramétrique d'une droite

Équation paramétrique d'une droite

Soit $\mathcal{D}$ une droite. Une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ est une relation du type $\begin{cases} x = x_A + \alpha t, \\ y = y_A + \beta t, \end{cases}$ pour t réel.

$$M(x,y) \in \mathcal{D} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_A + \alpha t, \\ y = y_A + \beta t, \end{cases} \text{pour un réel } t$$

- Le vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta)$ est alors un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
- Le vecteur $\vec{v}(-\beta, \alpha)$ est alors un vecteur normal à $\mathcal{D}$.
- Le point $A(x_A, y_A)$ est alors un point de $\mathcal{D}$ (pour $t = 0$).



Exemple

On cherche à exprimer les équations de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta)$.

• **Équation cartésienne :** Un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$, et donc si

$$(x - x_A)\beta - (y - y_A)\alpha = 0.$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}$$

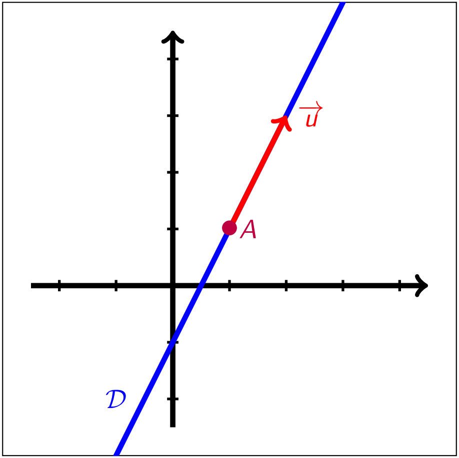
• **Équation paramétrique :** Un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$, et donc s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$.

$$\begin{cases} x - x_A = t\alpha \\ y - y_A = t\beta \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}$$

Si l'on cherche plutôt les équations de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, on peut se ramener au cas précédent en remarquant que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Exercice 2

Donner des équations cartésienne et paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(1,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1,2)$.



Exercice 2

Donner des équations cartésienne et paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(1,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1,2)$.

• **Équation cartésienne :** Un point $M(x,y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$, et donc si

$$\boxed{\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$2(x-1)-(y-1)=0.$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donc $2x-y-1=0$.

On identifie que le vecteur $\overrightarrow{v}(2,-1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

On peut réécrire l'équation cartésienne sous la forme $y=2x-1$.

On voit alors que la pente de $\mathcal{D}$ vaut 2.

De plus, si $P(3,y)\in\mathcal{D}$, on obtient $y=2\cdot 3-1=5$ et donc $P(3,5)$.

Exercice 2

Donner des équations cartésienne et paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(1,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1,2)$.

• **Équation paramétrique :** Un point $M(x,y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$, et donc s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$.

$$\left\{\begin{array}{l} x-1=t \\ y-1=2t \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x=1+t \\ y=1+2t \end{array}\right.$$

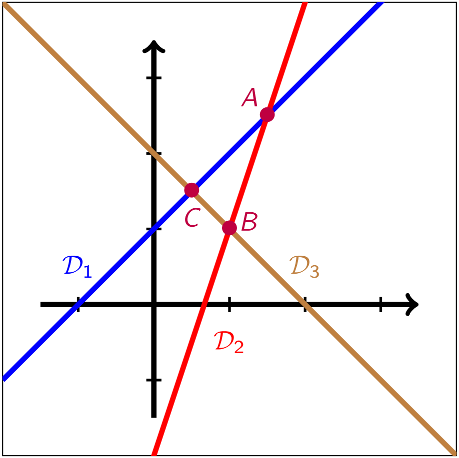
Une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x=1+t, \\ y=1+2t, \end{array}\right. \quad \text{pour } t \text{ réel.}$$

Exercice 3

On considère les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ définies par les équations cartésiennes

$$\mathcal{D}_1 : y = x + 1, \quad \mathcal{D}_2 : y = 3x - 2, \quad \mathcal{D}_3 : y = -x + 2.$$



Exercice 3

$$\mathcal{D}_1 : y = x + 1, \quad \mathcal{D}_2 : y = 3x - 2, \quad \mathcal{D}_3 : y = -x + 2$$

$$\{A\} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \implies \begin{cases} A \in \mathcal{D}_1 \\ A \in \mathcal{D}_2 \end{cases} \implies \begin{cases} y_A = x_A + 1 \\ y_A = 3x_A - 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_A = \frac{3}{2} \\ y_A = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\{B\} = \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 \implies \begin{cases} B \in \mathcal{D}_2 \\ B \in \mathcal{D}_3 \end{cases} \implies \begin{cases} y_B = 3x_B - 2 \\ y_B = -x_B + 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_B = 1 \\ y_B = 1 \end{cases}$$

$$\{C\} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3 \implies \begin{cases} C \in \mathcal{D}_1 \\ C \in \mathcal{D}_3 \end{cases} \implies \begin{cases} y_C = x_C + 1 \\ y_C = -x_C + 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_C = \frac{1}{2} \\ y_C = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Exercice 3

$$A(\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}), \quad B(1,1), \quad C(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2})$$

Pour calculer l'aire du triangle ABC, on peut utiliser la formule

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(ABC) &= \frac{1}{2}\Big|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)\Big| \\
&= \frac{1}{2}\Big|(1 - \tfrac{3}{2})(\tfrac{3}{2} - \tfrac{5}{2}) - (1 - \tfrac{5}{2})(\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2})\Big| \\
&= \frac{1}{2}\Big|(-\tfrac{1}{2}) \cdot (-1) - (-\tfrac{3}{2}) \cdot (-1)\Big| = \frac{1}{2}\Big|\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\Big| = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On peut également remarquer que le triangle ABC est rectangle en C. En effet, les vecteurs $\overrightarrow{CA}(1,1)$ et $\overrightarrow{CB}(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})$ sont orthogonaux car

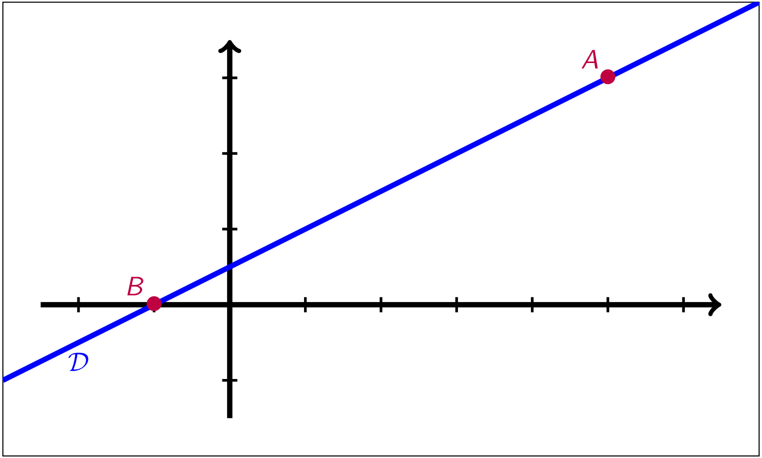
$$\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 0.$$

Dans ce cas,

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CB}\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4

On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(5,3)$ et $B(-1,0)$.



Exercice 4

On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(5,3)$ et $B(-1,0)$.

Le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}(-6,-3)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

• **Équation paramétrique :** Un point $M(x,y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$, et donc s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$.

$$\left\{\begin{array}{l} x-5=-6t \\ y-3=-3t \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} x=5-6t \\ y=3-3t \end{array}\right.$$

Une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x=5-6t, \\ y=3-3t, \end{array}\right. \text{ pour } t \text{ réel.}$$

Exercice 4

On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(5,3)$ et $B(-1,0)$.

Le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}(-6,-3)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

• **Équation cartésienne :** Un point $M(x,y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$, et donc si

$$(-3)(x-5) - (-6)(y-3) = 0.$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x-5 \\ y-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donc $-3x + 6y - 3 = 0$.

Projection orthogonale sur une droite

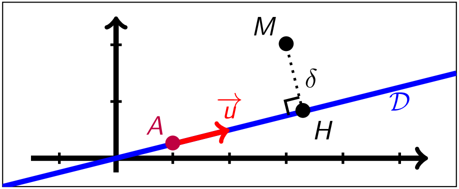
Soit $\mathcal{D}$ une droite. On note A un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Soit $M(x_M, y_M)$ un point du plan.

- Le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ est le point H défini par

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\langle \overrightarrow{AM}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}.$$

- Si $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, la distance δ de M à $\mathcal{D}$ vaut

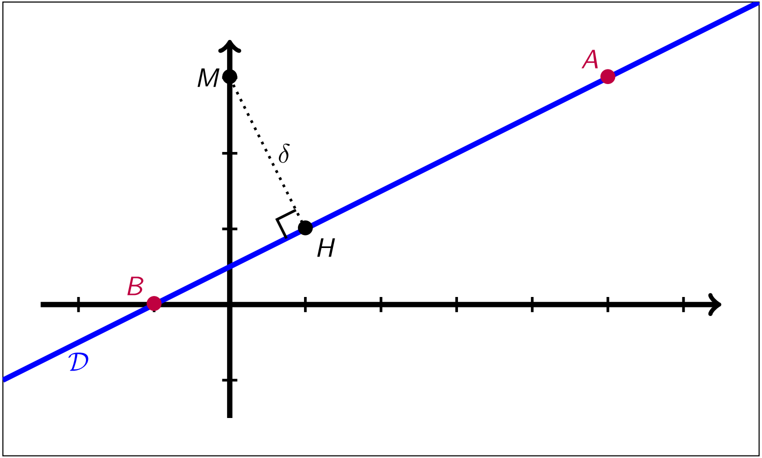
$$\delta = \|\overrightarrow{MH}\| = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



Exercice 4

$$A(5,3), \quad B(-1,0), \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB}(-6,-3)$$

On considère le point $M(0,3)$.



Exercice 4

$$A(5,3), \quad B(-1,0), \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}(-6,-3), \quad M(0,3)$$

• Le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ est le point H défini par $\overrightarrow{AH} = \frac{\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u}$.

On a alors

$$\overrightarrow{AM}(-5,0), \quad \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u} \rangle = 30, \quad \|\overrightarrow{u}\|^2 = 36 + 9 = 45.$$

Par suite, $\overrightarrow{AH} = \frac{30}{45} \overrightarrow{u} = \frac{2}{3} \overrightarrow{u}$, soit $\overrightarrow{AH}(-4,-2)$.

$$\begin{cases} x_H - x_A = -4 \\ y_H - y_A = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_H = 1 \\ y_H = 1 \end{cases} \implies H(1,1)$$

• Comme $\overrightarrow{MH}(1,-2)$, la distance δ de M à $\mathcal{D}$ vaut

$$\delta = \|\overrightarrow{MH}\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

Exercice 4

$$A(5,3), \quad B(-1,0), \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}(-6,-3), \quad M(0,3), \quad H(1,1), \quad \delta = \sqrt{5}$$

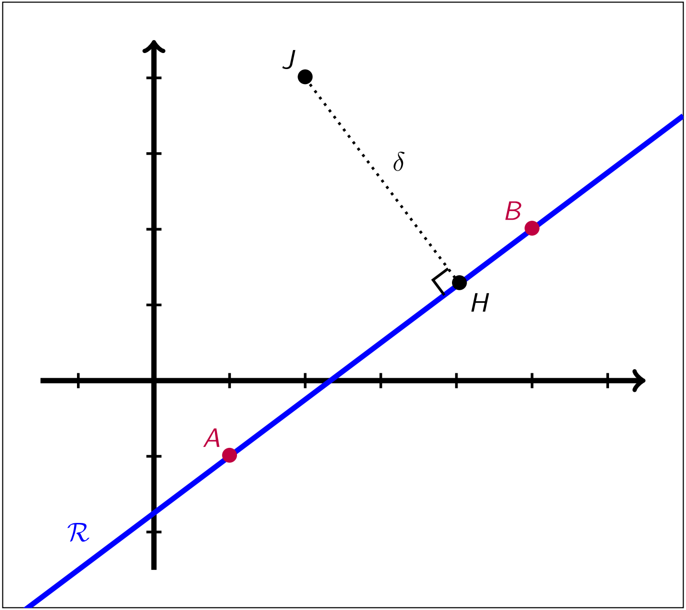
Pour calculer l'aire du triangle ABM, on utilise la formule

$$\text{Aire}(ABM) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{MH}\| = \frac{\delta}{2}\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{36+9} = \frac{15}{2}.$$

On remarque que le triangle BHM est isocèle rectangle en H. En effet, les vecteurs $\overrightarrow{HB}(-2,-1)$ et $\overrightarrow{HM}(-1,2)$ sont orthogonaux et de même norme car

$$\langle \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HM} \rangle = 2 - 2 = 0, \quad \|\overrightarrow{HB}\| = \|\overrightarrow{HM}\| = \sqrt{5}.$$

Exercice 6



Exercice 6

$$A(1,-1), \quad B(5,2), \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}(4,3), \quad J(2,4)$$

• Le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{R}$ est le point H défini par $\overrightarrow{AH} = \frac{\langle \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{u} \rangle}{\| \overrightarrow{u} \|^2} \overrightarrow{u}$.

On a alors

$$\overrightarrow{AJ}(1,5), \quad \langle \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{u} \rangle = 4 + 15 = 19, \quad \| \overrightarrow{u} \|^2 = 16 + 9 = 25.$$

Par suite, $\overrightarrow{AH} = \frac{19}{25} \overrightarrow{u}$, soit $\overrightarrow{AH}(\frac{76}{25}, \frac{57}{25})$.

$$\begin{cases} x_H - x_A = \frac{76}{25} \\ y_H - y_A = \frac{57}{25} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{101}{25} \\ y_H = \frac{32}{25} \end{cases} \Longrightarrow H(\frac{101}{25}, \frac{32}{25})$$

• Comme $\overrightarrow{JH}(\frac{51}{25}, -\frac{68}{25})$, la distance δ de J à $\mathcal{R}$ vaut

$$\delta = \| \overrightarrow{JH} \| = \frac{17}{5} = 3{,}4 \, \text{hm}.$$

Partie II

Géométrie dans l'espace

Produit vectoriel dans l'espace

Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, de coordonnées

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

- **Attention**, l'ordre de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est important, on a $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs unitaires et orthogonaux, alors le triplet de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ forme une base orthonormée de l'espace.
- Quatre points A, B, C et D sont coplanaires (i.e. appartiennent au même plan) si et seulement si $\langle \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = 0$.

Calcul pratique du produit vectoriel

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{matrix}}$$

Exercice 7

On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,3,2)$ et $\overrightarrow{v}(2,-3,3)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont ni colinéaires, ni orthogonaux. En effet,

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot (-3) - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0},$$

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 = -1 \neq 0.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,3,2)$ et $\overrightarrow{v}(2,-3,3)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont ni colinéaires, ni orthogonaux. En effet,

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot (-3) - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0},$$

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 = -1 \neq 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, de coordonnées $\overrightarrow{w}(15,1,-9)$, est non nul et orthogonal à la fois à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$. En effet,

$$\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle = 15 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-9) \cdot 2 = 0,$$

$$\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle = 15 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + (-9) \cdot 3 = 0.$$

Exercice 8

On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,1,-1)$ et $\overrightarrow{v}(0,-2,1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{e_1} = \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$ et de norme 1.

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{e_1}\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

On considère $\overrightarrow{x}$ de la forme $\overrightarrow{x} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Le vecteur $\overrightarrow{x}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ (ainsi qu'à $\overrightarrow{e_1}$) si et seulement si $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{u} \rangle = 0$.

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \langle \alpha\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \beta\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle + \beta\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha\|\overrightarrow{u}\|^2 + \beta\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3\alpha - 3\beta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \beta = \alpha$$

On a donc $\overrightarrow{x}$ de la forme $\overrightarrow{x} = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}$, soit $\overrightarrow{x}(\alpha, -\alpha, 0)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Le vecteur $\overrightarrow{e_2} = \frac{\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et de norme 1. Si $\alpha > 0$, alors

$$\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{2\alpha^2} = \sqrt{2}\alpha \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Exercice 8

Les vecteurs $\overrightarrow{e_1}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ et $\overrightarrow{e_2}(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ sont orthogonaux et unitaires.

Ainsi, si $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}$, le triplet $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ forme une base orthonormée.

$$\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 - (-\frac{1}{\sqrt{3}}) \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ (-\frac{1}{\sqrt{3}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$$

Les points $M_1(1,-1,2)$, $M_2(0,2,1)$, $M_3(-1,2,1)$ sont alignés si et seulement si

$$\overrightarrow{M_1M_2} \text{ et } \overrightarrow{M_1M_3} \text{ sont colinéaires,} \quad \text{c-à-d si } \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{0}.$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-1) - (-1)\cdot 3 \\ (-1)\cdot(-2) - (-1)\cdot(-1) \\ (-1)\cdot 3 - 3\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$$

Les points M_1, M_2 et M_3 ne sont donc pas alignés.

$$\boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Exercice 9

$$M_1(1,-1,2), \quad M_2(0,2,1), \quad M_3(-1,2,1), \quad \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}(0,1,3)$$

Soit un point M de coordonnées (x,y,z). Le point M appartient au plan passant par M_1, M_2 et M_3 si et seulement si

$$M_1, M_2, M_3 \text{ et } M \text{ sont coplanaires}, \quad \text{c-à-d si } \langle \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M} \rangle = 0.$$

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M} \rangle &= 0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y+1) + 3 \cdot (z-2) \\ &= y + 3z - 5 \end{aligned}$$

Les coordonnées (x,y,z) de M doivent donc vérifier

$$y + 3z - 5 = 0.$$

On a identifié ici une équation cartésienne du plan passant par M_1, M_2 et M_3.

Soit $\mathcal{P}$ un plan.

• Une base vectorielle de $\mathcal{P}$ est un couple de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, où A, B et C sont trois points non alignés de $\mathcal{P}$.

• Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est un vecteur orthogonal aux deux vecteurs d'une base vectorielle de $\mathcal{P}$.

Équation cartésienne d'un plan

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est une relation du type $ax + by + cz + d = 0$.

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \iff ax + by + cz + d = 0$$

• Le vecteur $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ est alors un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Équation paramétrique d'un plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan.

• Une base vectorielle de $\mathcal{P}$ est un couple de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, où A, B et C sont trois points non alignés de $\mathcal{P}$.

• Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est un vecteur orthogonal aux deux vecteurs d'une base vectorielle de $\mathcal{P}$.

Équation paramétrique d'un plan

Une équation paramétrique de $\mathcal{P}$ est une relation du type $\begin{cases} x = x_A + \alpha_1 t + \alpha_2 s, \\ y = y_A + \beta_1 t + \beta_2 s, \\ z = z_A + \gamma_1 t + \gamma_2 s, \end{cases}$ pour t, s réels.

$$M(x,y,z) \in \mathcal{P} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_A + \alpha_1 t + \alpha_2 s, \\ y = y_A + \beta_1 t + \beta_2 s, \\ z = z_A + \gamma_1 t + \gamma_2 s, \end{cases} \text{ pour des réels } t, s$$

• Les vecteurs $\overrightarrow{u}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $\overrightarrow{v}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ forment une base vectorielle de $\mathcal{P}$.

• Le vecteur $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est alors un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

• Le point $A(x_A, y_A, z_A)$ est alors un point de $\mathcal{P}$ (pour $t = s = 0$).

Exemple

On cherche à exprimer les équations du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de base vectorielle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, avec $\overrightarrow{u}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\overrightarrow{v}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. On note (a, b, c) les coordonnées du vecteur normal $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

• **Équation cartésienne :** Un point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$, et donc si

$$\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n} \rangle = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

• **Équation paramétrique :** Un point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est de la forme $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}$, avec $t, s \in \mathbb{R}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x - x_A = t\alpha_1 + s\alpha_2 \\ y - y_A = t\beta_1 + s\beta_2 \\ z - z_A = t\gamma_1 + s\gamma_2 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + \alpha_1 t + \alpha_2 s \\ y = y_A + \beta_1 t + \beta_2 s \\ z = z_A + \gamma_1 t + \gamma_2 s \end{array} \right.$$

Si l'on cherche plutôt les équations du plan $\mathcal{P}$ passant par les points non alignés A, B et C, on peut se ramener au cas précédent en remarquant que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base vectorielle de $\mathcal{P}$ et que $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Projection orthogonale sur un plan

Projection orthogonale sur un plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan. On note A un point de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
Soit $M(x_M, y_M, z_M)$ un point de l'espace.

• Le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ est le point H défini par

$$\overrightarrow{MH} = \frac{\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{n} \rangle}{\| \overrightarrow{n} \|^2} \overrightarrow{n}.$$

• Si $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, la distance δ de M à $\mathcal{P}$ vaut

$$\delta = \| \overrightarrow{MH} \| = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

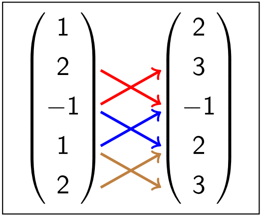
Exercice 10

On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,2,-1)$ et $\overrightarrow{v}(2,3,-1)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont ni colinéaires, ni orthogonaux. En effet,

$$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{\color{red}2\cdot(-1)-(-1)\cdot 3}\\{\color{blue}(-1)\cdot 2-1\cdot(-1)}\\{\color{brown}1\cdot 3-2\cdot 2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{\color{red}1}\\{\color{blue}-1}\\{\color{brown}-1}\end{pmatrix}\neq\overrightarrow{0},$$

$$\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle=1\cdot 2+2\cdot 3+(-1)\cdot(-1)=9\neq 0.$$



Exercice 10

$$\vec{u}(1,2,-1), \quad \vec{v}(2,3,-1), \quad \vec{u} \wedge \vec{v}(1,-1,-1)$$

On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(1,0,3)$ et de base vectorielle $(\vec{u}, \vec{v})$.

• **Équation paramétrique :** Un point $M(x,y,z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est de la forme $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + s\vec{v}$, avec $t, s \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{l} x-1=t+2s \\ y-0=2t+3s \\ z-3=-t-s \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x=1+t+2s \\ y=2t+3s \\ z=3-t-s \end{array}\right.$$

Une équation paramétrique de $\mathcal{P}$ est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x=1+t+2s, \\ y=2t+3s, \\ z=3-t-s, \end{array}\right. \quad \text{pour } t, s \text{ réels.}$$

Exercice 10

$$\overrightarrow{u}(1,2,-1), \quad \overrightarrow{v}(2,3,-1), \quad \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}(1,-1,-1)$$

On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(1,0,3)$ et de base vectorielle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Le vecteur $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de la base vectorielle de $\mathcal{P}$, il s'agit donc d'un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

• **Équation cartésienne :** Un point $M(x,y,z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$, et donc si

$$\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n} \rangle = (x-1) - (y-0) - (z-3) = 0.$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donc $x - y - z + 2 = 0$.

Exercice 10

$$\text{plan } \mathcal{P} \text{ passant par } A(1,0,3), \text{ de vecteur normal } \vec{n}(1,-1,-1)$$

$$\mathcal{P} : x - y - z + 2 = 0$$

On considère le point $M(1,1,-1)$ et on note H le projeté de M sur $\mathcal{P}$.

• Dans le cas général, pour $M(x_M, y_M, z_M)$ et $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, la distance δ de M à $\mathcal{P}$ s'exprime

$$\delta = \|\overrightarrow{MH}\| = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

• Dans le cas présent, on a donc

$$\delta = \frac{|1 - 1 - (-1) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Exercice 10

$$\text{plan } \mathcal{P} \text{ passant par } A(1,0,3), \text{ de vecteur normal } \overrightarrow{n}(1,-1,-1)$$

$$\mathcal{P} : x - y - z + 2 = 0$$

On considère le point $M(1,1,-1)$.

• Le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ est le point H défini par $\overrightarrow{MH} = \frac{\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{n} \rangle}{\| \overrightarrow{n} \|^2} \overrightarrow{n}$.

On a alors

$$\overrightarrow{MA}(0,-1,4), \quad \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{n} \rangle = -3, \quad \| \overrightarrow{n} \|^2 = 3.$$

Par suite, $\overrightarrow{MH} = \frac{-3}{3} \overrightarrow{n} = -\overrightarrow{n}$, soit $\overrightarrow{MH}(-1,1,1)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_H - x_M = -1 \\ y_H - y_M = 1 \\ z_H - z_M = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_H = 0 \\ y_H = 2 \\ z_H = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \quad H(0,2,0)$$

Exercice 11

On considère, en l'absence de champ électrostatique, une particule de charge $q = 2$ et de vitesse $\overrightarrow{v}(2, 4, 6)$, plongée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}(x, x, z)$. On mesure une force de Lorentz $\overrightarrow{F}(4, -20, 12)$ s'appliquant sur la particule.

On sait que la force de Lorentz s'exprime par $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$.

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\color{red}4z - 6x} \\ {\color{blue}6x - 2z} \\ {\color{brown}2x - 4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\color{red}4z - 6x} \\ {\color{blue}6x - 2z} \\ {\color{brown}-2x} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \\ x \\ x \end{pmatrix}}$$

Exercice 11

On considère, en l'absence de champ électrostatique, une particule de charge $q = 2$ et de vitesse $\overrightarrow{v}(2, 4, 6)$, plongée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}(x, x, z)$. On mesure une force de Lorentz $\overrightarrow{F}(4, -20, 12)$ s'appliquant sur la particule.

On sait que la force de Lorentz s'exprime par $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$.

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4z - 6x \\ 6x - 2z \\ 2x - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4z - 6x \\ 6x - 2z \\ -2x \end{pmatrix}$$

Afin d'identifier $\overrightarrow{B}$, on doit alors résoudre le système suivant.

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} \implies \begin{cases} 4 = 2(4z - 6x) \\ -20 = 2(6x - 2z) \\ 12 = -4x \end{cases} \implies \begin{cases} x = -3 \\ z = -4 \end{cases}$$

Le champ magnétique vaut donc $\overrightarrow{B}(-3, -3, -4)$.

Exercice 12

Les points $A(2,1,0)$, $B(-1,1,1)$, $C(0,2,1)$ sont alignés si et seulement si

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires}, \quad \text{c-à-d si } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}.$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-2) - (-3) \cdot 1 \\ (-3) \cdot 1 - 0 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$$

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés.

$$\boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 12

$$A(2,1,0), \quad B(-1,1,1), \quad C(0,2,1), \quad \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-1,1,-3)$$

On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par les points A, B et C.

Le couple de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ forme une base vectorielle de $\mathcal{P}$. Le vecteur $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ étant orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, il s'agit donc d'un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

• **Équation cartésienne :** Un point $M(x,y,z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$, et donc si

$$\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n} \rangle = -(x-2) + (y-1) - 3(z-0) = 0.$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donc $-x + y - 3z + 1 = 0$.

$$\text{plan } \mathcal{P} \text{ passant par } A(2,1,0), \text{ de vecteur normal } \vec{n}(-1,1,-3)$$

$$\mathcal{P} : -x + y - 3z + 1 = 0$$

On considère le point $M(1,-1,2)$.

- Le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ est le point H défini par $\overrightarrow{MH} = \frac{\langle \overrightarrow{MA}, \vec{n} \rangle}{\| \vec{n} \|^2} \vec{n}$.

On a alors

$$\overrightarrow{MA}(1,2,-2), \quad \langle \overrightarrow{MA}, \vec{n} \rangle = 7, \quad \| \vec{n} \|^2 = 11.$$

Par suite, $\overrightarrow{MH} = \frac{7}{11} \vec{n}$, soit $\overrightarrow{MH}(-\frac{7}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{21}{11})$.

$$\begin{cases} x_H - x_M = -\frac{7}{11} \\ y_H - y_M = \frac{7}{11} \\ z_H - z_M = -\frac{21}{11} \end{cases} \implies \begin{cases} x_H = \frac{4}{11} \\ y_H = -\frac{4}{11} \\ z_H = \frac{1}{11} \end{cases} \implies H(\frac{4}{11}, -\frac{4}{11}, \frac{1}{11})$$

- La distance δ de M à $\mathcal{P}$ vaut

$$\delta = \| \overrightarrow{MH} \| = \| \frac{7}{11} \vec{n} \| = \frac{7}{11} \| \vec{n} \| = \frac{7}{11} \cdot \sqrt{11} = \frac{7}{\sqrt{11}}.$$

Système d'équations cartésiennes d'une droite de l'espace

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace. Un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ est une relation du type $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

• Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}(a_1, b_1, c_1)$ et $\overrightarrow{n_2}(a_2, b_2, c_2)$ sont alors des vecteurs normaux à $\mathcal{D}$.

• Le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$ est alors un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Équation paramétrique d'une droite de l'espace

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace. Une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ est une relation du type $\begin{cases} x = x_A + \alpha t, \\ y = y_A + \beta t, \\ z = z_A + \gamma t, \end{cases}$ pour t réel.

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_A + \alpha t, \\ y = y_A + \beta t, \\ z = z_A + \gamma t, \end{cases} \text{ pour un réel } t$$

- Le vecteur $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ est alors un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
- Le point $A(x_A, y_A, z_A)$ est alors un point de $\mathcal{D}$ (pour $t = 0$).

$$A(2,1,0), \quad B(-1,1,1)$$

On considère la droite (AB). Cette droite passe par le point $A(2,1,0)$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}(-3,0,1)$ en est un vecteur directeur.

• **Équation paramétrique :** Un point $M(x,y,z)$ appartient à (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, et donc s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

$$\left\{\begin{array}{l} x-2=-3t \\ y-1=0 \\ z-0=t \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2-3t \\ y=1 \\ z=t \end{array}\right.$$

Une équation paramétrique de (AB) est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x=2-3t, \\ y=1, \\ z=t, \end{array}\right. \quad \text{pour } t \text{ réel.}$$

$$(AB) : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

• **Système d'équations cartésiennes :** Pour déterminer un système d'équations cartésiennes de (AB), on élimine la variable t des deux premières équations de l'équation paramétrique. On utilise pour cela la troisième équation $z = t$.

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 - 3z \\ y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 3z - 2 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

Un système d'équations cartésiennes de (AB) est donc

$$\begin{cases} x + 3z - 2 = 0, \\ y - 1 = 0. \end{cases}$$

Projection orthogonale sur une droite de l'espace

Projection orthogonale sur une droite de l'espace

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace. On note A un point de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
Soit $M(x_M, y_M, z_M)$ un point de l'espace.

- Le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ est le point H défini par

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u} \rangle}{\| \overrightarrow{u} \|^2} \overrightarrow{u}.$$

- La distance δ de M à $\mathcal{D}$ vaut $\delta = \|\overrightarrow{MH}\|$.

Exercice 12

$$A(2,1,0), \quad B(-1,1,1), \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}(-3,0,1), \quad M(1,-1,2)$$

Le projeté orthogonal de M sur (AB) est le point H défini par $\overrightarrow{AH} = \frac{\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u} \rangle}{\| \overrightarrow{u} \|^2} \overrightarrow{u}$.

On a alors

$$\overrightarrow{AM}(-1,-2,2), \quad \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u} \rangle = 5, \quad \| \overrightarrow{u} \|^2 = 10.$$

Par suite, $\overrightarrow{AH} = \frac{5}{10} \overrightarrow{u} = \frac{1}{2} \overrightarrow{u}$, soit $\overrightarrow{AH}(-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_H - x_A = -\frac{3}{2} \\ y_H - y_A = 0 \\ z_H - z_A = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_H = \frac{1}{2} \\ y_H = 1 \\ z_H = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow \quad H(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2})$$