TCM – Chapitre 3

Intégrales et primitives

Université Clermont Auvergne

23 octobre 2020

Notions étudiées :

- primitives de fonctions usuelles ;
- primitivation par reconnaissance d'une dérivée de fonctions composées ;
- primitivation par parties ;
- lien entre intégrales et primitives ;
- intégration par reconnaissance d'une dérivée de fonctions composées ;
- intégration par parties.

Primitive d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

- Une primitive de f est une fonction dérivable F vérifiant

$$F'(x) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in I.$$

- Si F est une primitive de f, toutes les primitives de f sont alors de la forme

$$x \mapsto F(x) + c, \quad \text{où } c \in \mathbb{R}.$$

- Pour $x_0 \in I$ et $a \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f vérifiant $F(x_0) = a$.

Exercice 1

On considère la fonction $f(x) = 4x - 2$.

- On remarque que

$$\begin{aligned} f(x) = 4x - 2 &= 2 \cdot 2x - 2 \cdot 1 \\ &= 2 \cdot (x^2)' - 2 \cdot (x)' = (2x^2 - 2x)'. \end{aligned}$$

La fonction $F(x) = 2x^2 - 2x = 2x(x-1)$ est donc une primitive de f.

- Par suite, toutes les primitives de f sont de la forme

$$F(x) = 2x(x-1) + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

- On cherche la primitive de f s'annulant en $x = 1$.

$$F(1) = 2 \cdot 1 \cdot (1-1) + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = 0$$

Ainsi, la fonction $F(x) = 2x(x-1)$ est l'unique primitive de f s'annulant en $x = 1$.

Exercice 2

On considère les fonctions composées

$$F(x) = e^{u(x)}, \quad G(x) = \ln(u(x)), \quad H(x) = (u(x))^2.$$

L'objectif est ici d'utiliser les fonctions F, G et H pour déterminer toutes les primitives de la fonction

$$k(x) = \sin(x)e^{-\cos(x)} + \tan(x) + \cos(x)\sin(x).$$

Exercice 2

On considère les fonctions composées

$$F(x) = e^{u(x)}, \quad G(x) = \ln(u(x)), \quad H(x) = (u(x))^2.$$

L'objectif est ici d'utiliser les fonctions F, G et H pour déterminer toutes les primitives de la fonction

$$k(x) = \sin(x)e^{-\cos(x)} + \tan(x) + \cos(x)\sin(x).$$

• Par dérivation de fonctions composées, on sait que $F'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Si l'on prend $\begin{cases} u(x) = -\cos(x) \\ u'(x) = \sin(x) \end{cases}$, on a alors $F'(x) = \sin(x)e^{-\cos(x)}$.

La fonction $F(x) = e^{-\cos(x)}$ est donc une primitive de $\sin(x)e^{-\cos(x)}$.

Exercice 2

On considère les fonctions composées

$$F(x) = e^{-\cos(x)}, \quad G(x) = \ln(u(x)), \quad H(x) = (u(x))^2.$$

L'objectif est ici d'utiliser les fonctions F, G et H pour déterminer toutes les primitives de la fonction

$$\begin{aligned} k(x) &= \sin(x)e^{-\cos(x)} + \tan(x) + \cos(x)\sin(x) \\ &= F'(x) + \tan(x) + \cos(x)\sin(x). \end{aligned}$$

• Par dérivation de fonctions composées, on sait que $F'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Si l'on prend $\left\{ \begin{array}{l} u(x) = -\cos(x) \\ u'(x) = \sin(x) \end{array} \right.$, on a alors $F'(x) = \sin(x)e^{-\cos(x)}$.

La fonction $F(x) = e^{-\cos(x)}$ est donc une primitive de $\sin(x)e^{-\cos(x)}$.

Exercice 2

On considère les fonctions composées

$$F(x) = e^{-\cos(x)}, \quad G(x) = \ln(u(x)), \quad H(x) = (u(x))^2.$$

L'objectif est ici d'utiliser les fonctions F, G et H pour déterminer toutes les primitives de la fonction

$$\begin{aligned} k(x) &= \sin(x)e^{-\cos(x)} + \tan(x) + \cos(x)\sin(x) \\ &= F'(x) + \tan(x) + \cos(x)\sin(x). \end{aligned}$$

• Par dérivation de fonctions composées, on sait que $G'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Si l'on prend $\begin{cases} u(x) = \cos(x) \\ u'(x) = -\sin(x) \end{cases}$, on a alors $G'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$.

La fonction $-G(x) = -\ln(\cos(x))$ est donc une primitive de $\tan(x)$.

Exercice 2

On considère les fonctions composées

$$F(x) = e^{-\cos(x)}, \quad G(x) = \ln(\cos(x)), \quad H(x) = (u(x))^2.$$

L'objectif est ici d'utiliser les fonctions F, G et H pour déterminer toutes les primitives de la fonction

$$\begin{aligned} k(x) &= \sin(x)e^{-\cos(x)} + \tan(x) + \cos(x)\sin(x) \\ &= F'(x) - G'(x) + \cos(x)\sin(x). \end{aligned}$$

• Par dérivation de fonctions composées, on sait que $G'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Si l'on prend $\begin{cases} u(x) = \cos(x) \\ u'(x) = -\sin(x) \end{cases}$, on a alors $G'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$.

La fonction $-G(x) = -\ln(\cos(x))$ est donc une primitive de $\tan(x)$.

Exercice 2

On considère les fonctions composées

$$F(x) = e^{-\cos(x)}, \quad G(x) = \ln(\cos(x)), \quad H(x) = (u(x))^2.$$

L'objectif est ici d'utiliser les fonctions F, G et H pour déterminer toutes les primitives de la fonction

$$\begin{aligned} k(x) &= \sin(x)e^{-\cos(x)} + \tan(x) + \cos(x)\sin(x) \\ &= F'(x) - G'(x) + \cos(x)\sin(x). \end{aligned}$$

• Par dérivation de fonctions composées, on sait que $H'(x) = 2u'(x)u(x)$.

Si l'on prend $\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ u'(x) = \cos(x) \end{cases}$, on a alors $H'(x) = 2\cos(x)\sin(x)$.

La fonction $\frac{1}{2}H(x) = \frac{1}{2}(\sin(x))^2$ est donc une primitive de $\cos(x)\sin(x)$.

Exercice 2

On considère les fonctions composées

$$F(x) = e^{-\cos(x)}, \quad G(x) = \ln(\cos(x)), \quad H(x) = (\sin(x))^2.$$

L'objectif est ici d'utiliser les fonctions F, G et H pour déterminer toutes les primitives de la fonction

$$\begin{aligned} k(x) &= \sin(x)e^{-\cos(x)} + \tan(x) + \cos(x)\sin(x) \\ &= F'(x) - G'(x) + \tfrac{1}{2}H'(x). \end{aligned}$$

• Par dérivation de fonctions composées, on sait que $H'(x) = 2u'(x)u(x)$.

Si l'on prend $\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ u'(x) = \cos(x) \end{cases}$, on a alors $H'(x) = 2\cos(x)\sin(x)$.

La fonction $\frac{1}{2}H(x) = \frac{1}{2}(\sin(x))^2$ est donc une primitive de $\cos(x)\sin(x)$.

Exercice 2

On considère les fonctions composées

$$F(x) = e^{-\cos(x)}, \quad G(x) = \ln(\cos(x)), \quad H(x) = (\sin(x))^2.$$

L'objectif est ici d'utiliser les fonctions F, G et H pour déterminer toutes les primitives de la fonction

$$\begin{aligned} k(x) &= \sin(x)e^{-\cos(x)} + \tan(x) + \cos(x)\sin(x) \\ &= F'(x) - G'(x) + \tfrac{1}{2}H'(x). \end{aligned}$$

- On voit que $k(x) = F'(x) - G'(x) + \frac{1}{2}H'(x) = \Big(F(x) - G(x) + \frac{1}{2}H(x)\Big)'$.

La fonction $K(x) = e^{-\cos(x)} - \ln(\cos(x)) + \frac{1}{2}(\sin(x))^2$ est donc une primitive de k.

- Par suite, toutes les primitives de k sont de la forme

$$K(x) = e^{-\cos(x)} - \ln(\cos(x)) + \tfrac{1}{2}(\sin(x))^2 + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Primitivation et fonctions composées

Soit f une fonction continue.

- Si f est de la forme

$$f(x) = u'(x)g(u(x))$$

et si G est une primitive de la fonction g, alors la fonction

$$F(x) = (G \circ u)(x) = G(u(x))$$

est une primitive de f.

En effet, par la formule de dérivation des fonctions composées, on a

$$F'(x) = (G \circ u)'(x) = u'(x)G'(u(x)) = u'(x)g(u(x)) = f(x).$$

Exercice 3.1

Pour déterminer des primitives, on cherche ici à identifier des dérivées de fonctions composées.

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x}{1+x^2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{1}{2} \cdot \Big(\ln(1+x^2) \Big)' \end{aligned}$$

Par suite, toutes les primitives de f sont de la forme

$$F(x) = \tfrac{1}{2} \ln(1+x^2) + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.2

Pour déterminer des primitives, on cherche ici à identifier des dérivées de fonctions composées.

On considère la fonction $g(x) = \dfrac{e^{3x}}{1+e^{3x}}$.

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+e^{3x})'}{1+e^{3x}} = \frac{1}{3} \cdot \Big(\ln(1+e^{3x}) \Big)' \end{aligned}$$

Par suite, toutes les primitives de g sont de la forme

$$G(x) = \tfrac{1}{3} \ln(1+e^{3x}) + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.3

Pour déterminer des primitives, on cherche ici à identifier des dérivées de fonctions composées.

On considère la fonction $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

$$\begin{aligned} h(x) = \frac{\ln(x)}{x} &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln(x) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (\ln(x))' \cdot \ln(x) = \frac{1}{2} \cdot \left((\ln(x))^2\right)' \end{aligned}$$

Par suite, toutes les primitives de h sont de la forme

$$H(x) = \tfrac{1}{2}(\ln(x))^2 + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.4

Pour déterminer des primitives, on cherche ici à identifier des dérivées de fonctions composées.

On considère la fonction $k(x) = \cos(x)(\sin(x))^2$.

$$\begin{aligned} k(x) = \cos(x)(\sin(x))^2 &= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \cos(x) \cdot (\sin(x))^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (\sin(x))' \cdot (\sin(x))^2 = \frac{1}{3} \cdot \left((\sin(x))^3\right)' \end{aligned}$$

Par suite, toutes les primitives de k sont de la forme

$$K(x) = \tfrac{1}{3}(\sin(x))^3 + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.5

Pour déterminer des primitives, on cherche ici à identifier des dérivées de fonctions composées.

On considère la fonction $\ell(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

$$\begin{aligned} \ell(x) = \frac{1}{x\ln(x)} &= \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} \\ &= \frac{(\ln(x))'}{\ln(x)} = \Big(\ln(\ln(x))\Big)' \end{aligned}$$

Par suite, toutes les primitives de ℓ sont de la forme

$$L(x) = \ln(\ln(x)) + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.6

Pour déterminer des primitives, on cherche ici à identifier des dérivées de fonctions composées.

On considère la fonction $m(x) = 3x\sqrt{1+x^2}$.

$$\begin{aligned} m(x) = 3x\sqrt{1+x^2} &= \frac{3}{2} \cdot 2x \cdot (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3}{2} \cdot (1+x^2)' \cdot (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = \left((1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right)' \end{aligned}$$

Par suite, toutes les primitives de m sont de la forme

$$M(x) = (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Primitivation par parties

Par la formule de dérivation d'un produit, on a

$$\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Primitivation par parties

Soit f une fonction continue.

- Si f est de la forme $f(x) = u'(x)v(x)$, on peut alors écrire

$$f(x) = u'(x)v(x) = \big(u(x)v(x)\big)' - u(x)v'(x).$$

- Si de plus la fonction H est une primitive de $h(x) = u(x)v'(x)$, il vient

$$f(x) = \big(u(x)v(x)\big)' - h(x) = \big(u(x)v(x)\big)' - H'(x) = \big(u(x)v(x) - H(x)\big)'.$$

- La fonction $F(x) = u(x)v(x) - H(x)$ est donc une primitive de f.

Exercice 4.1

Pour déterminer des primitives, on utilise ici la formule de primitivation par parties.

On considère la fonction $f(x) = x\cos(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = x\cos(x) &= x \cdot (\sin(x))' \\ &= (x \cdot \sin(x))' - (x)' \cdot \sin(x) \\ &= (x \cdot \sin(x))' - \sin(x) \\ &= (x \cdot \sin(x))' + (\cos(x))' = \Big(x \cdot \sin(x) + \cos(x)\Big)' \end{aligned}$$

Par suite, toutes les primitives de f sont de la forme

$$F(x) = x\sin(x) + \cos(x) + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.1

Pour déterminer des primitives, on utilise ici la formule de primitivation par parties.

On considère la fonction $g(x) = x^2 \ln(x)$.

$$\begin{aligned} g(x) = x^2 \ln(x) &= (x^3/3)' \cdot \ln(x) \\ &= (x^3/3 \cdot \ln(x))' - x^3/3 \cdot (\ln(x))' \\ &= (x^3/3 \cdot \ln(x))' - x^3/3 \cdot 1/x \\ &= (x^3/3 \cdot \ln(x))' - x^2/3 \\ &= (x^3/3 \cdot \ln(x))' - (x^3/9)' = \left(x^3/3 \cdot \ln(x) - x^3/9\right)' \end{aligned}$$

Par suite, toutes les primitives de g sont de la forme

$$G(x) = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.1

Pour déterminer des primitives, on utilise ici la formule de primitivation par parties.

On considère la fonction $h(x) = (\ln(x))^2$.

$$\begin{aligned} h(x) = (\ln(x))^2 &= (x)' \cdot (\ln(x))^2 \\ &= (x \cdot (\ln(x))^2)' - x \cdot ((\ln(x))^2)' \\ &= (x \cdot (\ln(x))^2)' - x \cdot 2\ln(x)/x \\ &= (x \cdot (\ln(x))^2)' - 2\ln(x) \\ &= (x \cdot (\ln(x))^2)' - 2 \cdot (x\ln(x) - x)' = \Big(x \cdot (\ln(x))^2 \\ &\qquad\qquad - 2 \cdot (x\ln(x) - x)\Big)' \end{aligned}$$

Par suite, toutes les primitives de h sont de la forme

$$H(x) = x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.2

On considère la fonction $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$.

On cherche une primitive de f sous la forme $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x \\ &= \Big(ax^2 + (2a + b)x + (b + c)\Big)e^x \end{aligned}$$

Pour avoir $F'(x) = f(x)$, il faut alors que

$$\begin{cases} a = 1, \\ 2a + b = 1, \\ b + c = 1, \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a = 1, \\ b = -1, \\ c = 2. \end{cases}$$

La fonction $F(x) = (x^2 - x + 2)e^x$ est donc une primitive de f.

Exercice 4.2

On considère la fonction $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$.

On cherche une primitive de f par primitivation par parties.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + x + 1) \cdot (e^x)' \\ &= ((x^2 + x + 1) \cdot e^x)' - (x^2 + x + 1)' \cdot e^x \\ &= ((x^2 + x + 1) \cdot e^x)' - (2x + 1)e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2x + 1)e^x &= (2x + 1) \cdot (e^x)' \\ &= ((2x + 1) \cdot e^x)' - (2x + 1)' \cdot e^x \\ &= ((2x + 1) \cdot e^x)' - 2e^x = ((2x + 1) \cdot e^x)' - (2e^x)' \end{aligned}$$

On voit que $f(x) = \Big((x^2 + x + 1)e^x - (2x + 1)e^x + 2e^x\Big)'$.

La fonction $F(x) = (x^2 - x + 2)e^x$ est donc une primitive de f.

Exercice 4.3

On considère les fonctions $f(x) = \sin(\ln(x))$ et $g(x) = \cos(\ln(x))$.

On note F une primitive de f et G une primitive de g.

- Par primitivation par parties, on exprime F en fonction de G.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x)' \cdot \sin(\ln(x)) \\
&= (x \cdot \sin(\ln(x)))' - x \cdot (\sin(\ln(x)))' \\
&= (x \cdot \sin(\ln(x)))' - x \cdot \cos(\ln(x))/x \\
&= (x \cdot \sin(\ln(x)))' - g(x) \\
&= (x \cdot \sin(\ln(x)))' - G'(x) = \Big(x \cdot \sin(\ln(x)) - G(x)\Big)'
\end{aligned}$$

On voit alors que $F(x) = x \sin(\ln(x)) - G(x)$.

Exercice 4.3

On considère les fonctions $f(x) = \sin(\ln(x))$ et $g(x) = \cos(\ln(x))$.

On note F une primitive de f et G une primitive de g.

- Par primitivation par parties, on exprime G en fonction de F.

$$\begin{aligned}
g(x) &= (x)' \cdot \cos(\ln(x)) \\
&= (x \cdot \cos(\ln(x)))' - x \cdot (\cos(\ln(x)))' \\
&= (x \cdot \cos(\ln(x)))' + x \cdot \sin(\ln(x))/x \\
&= (x \cdot \cos(\ln(x)))' + f(x) \\
&= (x \cdot \cos(\ln(x)))' + F'(x) = \Big(x \cdot \cos(\ln(x)) + F(x)\Big)'
\end{aligned}$$

On voit alors que $G(x) = x\cos(\ln(x)) + F(x)$.

Exercice 4.3

On considère les fonctions $f(x) = \sin(\ln(x))$ et $g(x) = \cos(\ln(x))$.

On note F une primitive de f et G une primitive de g.

- On a montré précédemment que

$$\begin{cases} F(x) = x\sin(\ln(x)) - G(x), \\ G(x) = x\cos(\ln(x)) + F(x). \end{cases}$$

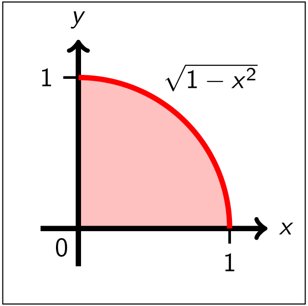
Ainsi, $F(x) = x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x)) - F(x)$.

Par suite, $2F(x) = x\Big(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))\Big)$.

On en déduit donc que

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{x}{2}\Big(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))\Big), \\ G(x) = \dfrac{x}{2}\Big(\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x))\Big). \end{cases}$$

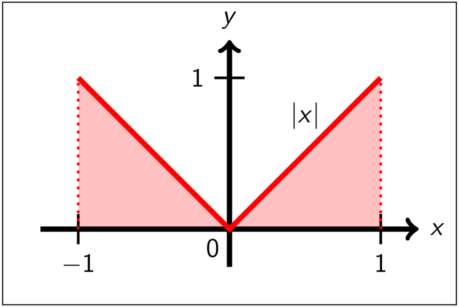
Exercice 5.1



On voit que l'intégrale $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ représente l'aire d'un quart de cercle de rayon 1. Par suite,

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 5.2



On voit que l'intégrale $J = \int_{-1}^{1} |x| \, dx$ représente la somme des aires de deux triangles isocèles rectangles de côté 1. Par suite,

$$J = \int_{-1}^{1} |x| \, dx = 2 \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} = 1.$$

Intégrale d'une fonction

Intégrale d'une fonction

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.

- Si la fonction F est une primitive de f, on a alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

- On a également la relation de Chasles. Pour $c \in \,]a, b[$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On considère la fonction $f(x) = x^2 + x - 2$.

- On cherche le signe de f.

Le discriminant du trinôme vaut $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0$.

Les racines du trinôme sont donc $x = \frac{-1-\sqrt{9}}{2 \cdot 1} = -2$ et $x = \frac{-1+\sqrt{9}}{2 \cdot 1} = 1$.

Comme $1 > 0$, le trinôme est négatif entre ses racines et positif sinon.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- On peut alors écrire

$$I = \int_{-3}^{2} |f(x)| \, \mathrm{d}x = \int_{-3}^{-2} |f(x)| \, \mathrm{d}x + \int_{-2}^{1} |f(x)| \, \mathrm{d}x + \int_{1}^{2} |f(x)| \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_{-3}^{-2} f(x) \, \mathrm{d}x - \int_{-2}^{1} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Exercice 6

On considère la fonction $f(x) = x^2 + x - 2$.

On observe que la fonction $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$ est une primitive de f.

- On calcule d'une part

$$\begin{aligned} I = \int_{-3}^{2} |f(x)| \, dx &= \int_{-3}^{-2} f(x) \, dx - \int_{-2}^{1} f(x) \, dx + \int_{1}^{2} f(x) \, dx \\ &= \Big[F(x)\Big]_{-3}^{-2} - \Big[F(x)\Big]_{-2}^{1} + \Big[F(x)\Big]_{1}^{2} \\ &= F(2) - 2F(1) + 2F(-2) - F(-3) = 10 - \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

- On calcule d'autre part

$$J = \int_{-3}^{2} f(x) \, dx = \Big[F(x)\Big]_{-3}^{2} = F(2) - F(-3) = -\frac{5}{6}.$$

- On remarque alors que $I > J$. Cela est lié au fait que $f(x) \leq |f(x)|$.

Exercice 7.1

On considère la fonction $f(x) = 1 - \cos(3x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = 1 - \cos(3x) &= (x)' - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \cos(3x) \\ &= (x)' - \frac{1}{3} \cdot (3x)' \cdot \cos(3x) \\ &= (x)' - \frac{1}{3} \cdot (\sin(3x))' = \left(x - \frac{1}{3} \cdot \sin(3x)\right)' \end{aligned}$$

La fonction $F(x) = x - \frac{1}{3}\sin(3x)$ est donc une primitive de f. Par suite,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos(3x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[F(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= F(\tfrac{\pi}{3}) - F(0) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 7.2

On considère la fonction $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x) = (-\cos(x))' + (\sin(x))' = \Big(-\cos(x) + \sin(x)\Big)'$$

La fonction $F(x) = \sin(x) - \cos(x)$ est donc une primitive de f. Par suite,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) + \cos(x))\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= F(\tfrac{\pi}{2}) - F(0) = 2.\end{aligned}$$

Exercice 7.3

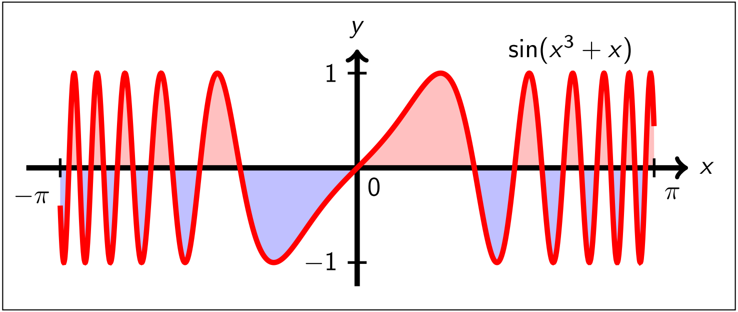
On considère la fonction $f(x) = x\sin(x^2)$.

$$\begin{aligned} f(x) = x\sin(x^2) &= \frac{1}{2}\cdot 2x \cdot \sin(x^2) \\ &= \frac{1}{2}\cdot (x^2)' \cdot \sin(x^2) = \frac{1}{2}\cdot \Big(-\cos(x^2)\Big)' \end{aligned}$$

La fonction $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(x^2)$ est donc une primitive de f. Par suite,

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{\pi}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[F(x)\Big]_0^{\sqrt{\pi}} \\ &= F(\sqrt{\pi}) - F(0) = 1. \end{aligned}$$

Exercice 7.4



L'intégrale de $\sin(x^3+x)$ entre $-\pi$ et π représente l'aire sous la courbe ci-dessus, les aires en rouge étant comptées positivement et les aires en bleu étant comptées négativement. On peut alors voir que pour chaque aire en rouge, il existe une aire en bleu qui la compense. Par suite,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^3+x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Exercice 7.5

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln(x))^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot (\ln(x))' \cdot (\ln(x))^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \left((\ln(x))^{\frac{3}{2}}\right)' \end{aligned}$$

La fonction $F(x) = \frac{2}{3}(\ln(x))^{\frac{3}{2}}$ est donc une primitive de f. Par suite,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_1^2 \\ = F(2) - F(1) = \frac{2}{3}(\ln(2))^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Exercice 7.6

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{x^2}$.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\ln(x) - 1}{x^2} &= -\frac{1 - \ln(x)}{x^2} \\ &= -\frac{1/x \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} \\ &= -\frac{(\ln(x))' \cdot x - \ln(x) \cdot (x)'}{x^2} = -\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' \end{aligned}$$

La fonction $F(x) = -\dfrac{\ln(x)}{x}$ est donc une primitive de f. Par suite,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\ln(x) - 1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[F(x)\Big]_1^2 \\ &= F(2) - F(1) = -\frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

Intégration par parties

Par la formule de dérivation d'un produit, on a

$$\Big(u(x)v(x)\Big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

En intégrant cette relation sur $[a, b]$, il vient

$$\int_a^b \Big(u(x)v(x)\Big)' \,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Intégration par parties

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.

- Si f est de la forme $f(x) = u'(x)v(x)$, on peut alors écrire

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Cette formule est utile lorsque l'intégrale de $x \mapsto u(x)v'(x)$ est plus simple à calculer que l'intégrale de $x \mapsto u'(x)v(x)$.

Exercice 8

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b=0 \\ a=1 \end{array}\right.$$
$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \end{array}\right.$$

On a ainsi montré que $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} &= (\ln(x))' - \frac{(x+1)'}{x+1} \\ &= (\ln(x))' - (\ln(x+1))' = \Big(\ln(x) - \ln(x+1)\Big)' \end{aligned}$$

La fonction $F(x) = \ln(x) - \ln(x+1)$ est donc une primitive de f.

Exercice 8

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}, \quad F(x) = \ln(x) - \ln(x+1)$$

On peut alors calculer

$$\begin{aligned} J = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_1^2 \\ = F(2) - F(1) = 2\ln(2) - \ln(3). \end{aligned}$$

Exercice 8

$$J = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = 2\ln(2) - \ln(3)$$

À l'aide d'une intégration par parties, on peut également calculer

$$\begin{aligned}
I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t &= -\int_1^2 \frac{-1}{t^2}\cdot\ln(1+t)\,\mathrm{d}t = -\int_1^2 \left(\frac{1}{t}\right)'\cdot\ln(1+t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\left(\left[\frac{1}{t}\cdot\ln(1+t)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{t}\cdot\Big(\ln(1+t)\Big)'\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\left(\left[\frac{1}{t}\cdot\ln(1+t)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\left[\frac{1}{t}\cdot\ln(1+t)\right]_1^2 + J = \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3) + J \\
&= 3\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3).
\end{aligned}$$