Feuille d'exercices n° 2 - Vecteurs et géométrie vectorielle

Dans cette feuille, on munit le plan (resp. l'espace) d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (resp. $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$) et on exprime les coordonnées dans ce repère.

Vecteurs du plan

Exercice 1. On considère les points $A(1,0)$ et $B(2,1)$ et les vecteurs du plan suivants :

$$\overrightarrow{u_1}(1,2); \quad \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}; \quad \overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{u_4} = 3\overrightarrow{u_3} - \overrightarrow{u_2}.$$

1. Calculer les produits scalaires $\langle \overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{u_m} \rangle$ avec n, m deux entiers compris entre 1 et 4.
2. Parmi les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4}$, quels sont ceux qui sont orthogonaux ? colinéaires ?
3. Pour tout entier $n \in \{1,2,3,4\}$, déterminer un vecteur $\overrightarrow{v_n}$ unitaire (c'est-à-dire de norme 1) et colinéaire à $\overrightarrow{u_n}$. Combien y a-t-il de choix pour chacun d'eux ?
4. Les vecteurs ($\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$) forment une base orthonormée du plan. Exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_4}$ dans cette base.
5. Déterminer tous les vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{u_1}$. Combien y en a-t-il de même norme que $\overrightarrow{u_1}$?

Exercice 2. Donner des équations paramétrique et cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(1,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath}$. Donner un vecteur normal et la pente de $\mathcal{D}$. Quelle est l'ordonnée du point de $\mathcal{D}$ dont l'abscisse vaut 3 ?

Exercice 3. Trois droites du plan sont définies par une équation cartésienne :

$$\mathcal{D}_1 : y = x + 1; \quad \mathcal{D}_2 : y = 3x - 2; \quad \mathcal{D}_3 : y = -x + 2.$$

Calculer l'aire du triangle ABC où $\{A\} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, $\{B\} = \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3$, $\{C\} = \mathcal{D}_3 \cap \mathcal{D}_1$.

Exercice 4. On considère la droite $\mathcal{D}$ du plan passant par les points $A(5,3)$ et $B(-1,0)$.

1. Déterminer un vecteur directeur ainsi qu'une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.
2. Écrire une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.
3. Soit M le point du plan de coordonnées $(0,3)$.
   (a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{D}$.
   (b) Quelle est la distance entre M et $\mathcal{D}$?
4. Calculer l'aire du triangle ABM.
5. En plus d'être rectangle, quelle propriété a le triangle BHM ?

Exercice 5. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\imath} + \frac{4}{5}\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{v} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{\imath} + \frac{3}{5}\overrightarrow{\jmath}$.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base orthonormée du plan.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 6. Jean se trouve dans un champ bordé par une rivière supposée rectiligne. Jean est au point J de coordonnées $(2,4)$ et la rivière passe par les points $A(1,-1)$ et $B(5,2)$. Jean veut aller se baigner dans la rivière et s'y rend au plus court (l'unité de longueur est l'hectomètre).

1. Déterminer les coordonnées du point de baignade de Jean.
2. Quelle distance a-t-il parcourue pour aller se baigner ?

Vecteurs de l'espace

Exercice 7. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\imath} + 3\overrightarrow{\jmath} + 2\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{\imath} - 3\overrightarrow{\jmath} + 3\overrightarrow{k}$.

1. Sont-ils colinéaires ? Sont-ils orthogonaux ?
2. Déterminer un vecteur non nul $\overrightarrow{w}$ orthogonal à la fois à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.

Exercice 8. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}$.

1. Calculer un vecteur $\overrightarrow{e_1}$ colinéaire à $\overrightarrow{u}$ et de norme 1.
2. Déterminer tous les vecteurs $\overrightarrow{x}$ de la forme $\overrightarrow{x} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et qui sont orthogonaux à $\overrightarrow{u}$. Trouver un tel vecteur $\overrightarrow{e_2}$ qui soit aussi de norme 1.
3. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{e_3}$ tel que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ forme une base orthonormée.

Exercice 9. Soient les points M_1 de coordonnées $(1, -1, 2)$, M_2 de coordonnées $(0, 2, 1)$, M_3 de coordonnées $(-1, 2, 1)$ et M de coordonnées (x, y, z).

1. Les points M_1, M_2 et M_3 sont-ils alignés ?
2. À quelle(s) condition(s) portant sur x, y, z le point M appartient-il au plan passant par M_1, M_2 et M_3 ?

Exercice 10. Soit $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Sont-ils orthogonaux ? Justifier.
2. Donner une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par le point A de coordonnées $(1, 0, 3)$ et de base vectorielle $(\vec{u}, \vec{v})$.
3. Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $x - y - z + 2 = 0$.
4. Calculer la distance du point M de coordonnées $(1, 1, -1)$ au plan $\mathcal{P}$.
5. Quelles sont les coordonnées du projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$?

Exercice 11. En l'absence de champ électrostatique, la force de Lorentz pour une particule de charge q et de vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ s'exprime par : $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{B}$ dans la base orthonormée $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, sachant que ses deux premières coordonnées sont égales, lorsque $q = 2$, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{\imath} + 4\overrightarrow{\jmath} + 6\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{F} = 4\overrightarrow{\imath} - 20\overrightarrow{\jmath} + 12\overrightarrow{k}$.

Exercice 12. Soient quatre points $M(1, -1, 2)$, $A(2, 1, 0)$, $B(-1, 1, 1)$ et $C(0, 2, 1)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A, B et C.
3. Déterminer le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$.
4. Calculer la distance de M à $\mathcal{P}$.
5. Donner une équation paramétrique, puis un système d'équations cartésiennes, de la droite (AB).
6. Déterminer le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

Exercices complémentaires

Exercice 13. Soit A de coordonnées $(-2, 1)$ et B de coordonnées $(0, 5)$. On note $\mathcal{D}$ la droite passant par les points A et B.

1. Écrire un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et calculer ses coordonnées.
2. Donner une équation cartésienne et une équation paramétrique de $\mathcal{D}$.
3. Calculer la distance du point M de coordonnées $(1, 2)$ à la droite $\mathcal{D}$. On note $\mathcal{D}'$ la droite passant par M perpendiculaire à $\mathcal{D}$.
4. Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$?

Exercice 14. Soit a un nombre réel non nul et f la fonction définie par $f(x) = e^{ax}$. Soit M un point de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f d'abscisse x_0.

1. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point M.
2. Le point M se projette orthogonalement sur l'axe des abscisses en un point H. On note C le point d'intersection de $\mathcal{T}$ avec l'axe des abscisses.
   (a) Illustrer la situation sur un dessin.
   (b) Montrer que la distance HC ne dépend pas du point M choisi.

Exercice 15. On considère les deux droites de l'espace suivantes :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} 2x + 5y + z & = & 9 \\ x + 3y + 2z & = & 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' : \begin{cases} 2x + 3y - 3z & = & 7 \\ x + 2y - z & = & 5 \end{cases}.$$

1. Trouver un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{D}$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}'$ de $\mathcal{D}'$.
2. Trouver un point A de $\mathcal{D}$ et un point A' de $\mathcal{D}'$.
3. Montrer que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont disjointes.

Exercice 16 (Extrait de l'examen terminal seconde session 2018-2019)**.** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les points A de coordonnées $(0, 1, -1)$, B de coordonnées $(-1, 1, 1)$, C de coordonnées $(1, 2, -2)$ et D de coordonnées $(-2, -1, -2)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A, B et C.
3. Déterminer le projeté orthogonal du point D sur le plan $\mathcal{P}$.
4. Donner une équation paramétrique de la droite (AB).
5. Donner un système d'équations cartésiennes de la droite (AB).
6. Justifier que la distance du point D à la droite (AB) vaut $\|\overrightarrow{AD}\|$. Calculer cette distance.