Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 3 - Intégrales et primitives

Exercice 1.

1. Déterminer toutes les primitives de la fonction $x \mapsto 4x - 2$.
2. Parmi ces primitives, déterminer celle(s) qui s'annule(nt) en $x = 1$.

Exercice 2. Étant donnée une fonction dérivable et positive u, dériver les fonctions suivantes :

$$x \mapsto e^{u(x)}, \qquad x \mapsto \ln(u(x)), \qquad x \mapsto u(x)^2.$$

En déduire toutes les primitives de la fonction, définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par

$$x \longmapsto \sin(x)e^{-\cos(x)} + \tan(x) + \cos(x)\sin(x).$$

Exercice 3. Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \qquad g(x) = \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}, \qquad h(x) = \frac{\ln(x)}{x},$$

$$k(x) = \cos(x)\sin^2(x), \qquad l(x) = \frac{1}{x\ln(x)}, \qquad m(x) = 3x\sqrt{1+x^2}.$$

Exercice 4.

1. À l'aide de la méthode d'intégration par parties, donner toutes les primitives des fonctions suivantes :
$$x \mapsto x\cos(x), \qquad x \mapsto x^2\ln(x), \qquad x \mapsto (\ln(x))^2.$$
2. Soient a, b, c trois nombres réels. Dériver la fonction $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x$. En déduire une primitive de la fonction $f\colon x \mapsto (x^2 + x + 1)e^x$. Retrouver ce résultat en appliquant deux fois la méthode d'intégration par parties à la fonction f.

Exercice 5. À l'aide d'une représentation graphique et en appliquant la définition géométrique de l'intégrale, déterminer la valeur des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_{-1}^1 |x|\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6.

1. Avec la relation de Chasles, donner une expression de $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos(x)|\,\mathrm{d}x$ comme somme de trois intégrales de fonctions ne faisant plus intervenir de valeur absolue.
2. Calculer I et comparer avec $J = \displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 7. À l'aide du théorème fondamental du calcul intégral, calculer les intégrales suivantes. Pour déterminer une primitive des fonctions à intégrer, on pourra notamment utiliser la reconnaissance de dérivée de fonctions composées ou la méthode de primitivation par parties.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos(3x))\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^1 (x-1)e^x\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^2 \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^2 \frac{\ln(x)-1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 8. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [1,2]$, on a : $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$.
2. Déduire de la question précédente la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$.
3. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercices complémentaires

Exercice 9. Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes (pour les quatre dernières, on pourra utiliser la méthode de primitivation par parties) :

$$f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}, \qquad f_2(x) = \sqrt{2x+1}, \qquad f_3(x) = x^p\ln(x) \;\text{ où } p \neq -1,$$

$$f_4(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2}, \qquad f_5(x) = \cos(x)\,\ln(1+\cos(x)), \qquad f_6(x) = \frac{x\,\ln(\sqrt{x^2+3})}{\sqrt{x^2+3}}.$$

Exercice 10. Déterminer les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ (on décomposera la fraction $\dfrac{x}{x+1}$ sous la forme $a + \dfrac{b}{x+1}$ avec a et b constants). En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 11. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}$.

1. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$.
2. En déduire la dérivée de la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+2})$.
3. Calculer I.