Feuille d'exercices n° 1 - Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1. Pour chacune des fonctions h ci-dessous, déterminer des fonctions f et g telles qu'on puisse écrire $h = g \circ f$:

$$h(x) = \cos(3x+1), \qquad h(x) = \sin(x^2+1) + \sqrt{x^2+1}, \qquad h(x) = e^{\frac{1}{x+1}}.$$

Dans chacun des cas, déterminer la fonction $f \circ g$.

Exercice 2. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

$$\ln(-2x+3) - 2\ln(x) = 0, \qquad \log\left(7000\sqrt{10^{(x^2-4)}}\right) = 2 + \log(7), \qquad (\log(x)+1)(\log(x)-2) > 0$$

$$e^{2x} + e^x - 2 > 0, \qquad \cos(x) = \frac{1}{2}, \qquad 4^x > \frac{1}{2}.$$

Exercice 3. Un expérimentateur fait des mesures (approximatives) d'une quantité qui décroit au cours du temps. Il pense que cette quantité suit une loi de la forme $Q(t) = C\,t^{-\gamma}$, où C et γ sont des constantes, et voudrait le vérifier.

t = temps en heures	5	12	28	43
$Q(t)$	76	20,5	5,8	3

Afin d'étudier son hypothèse, il trace sur un graphique le logarithme de $Q(t)$ en fonction du logarithme du temps : $\ln(t) \longmapsto \ln(Q(t))$.

1. Pourquoi est-ce judicieux d'utiliser le logarithme ?
2. Tracer les points à l'aide du tableau de mesures. L'hypothèse qu'il a faite vous parait-elle juste ? Si oui, déterminer une valeur approximative de γ et de C.

Exercice 4. Déterminer la dérivée des fonctions composées suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x) + 2}, \qquad g(a) = \frac{a^2-1}{a+4}, \qquad h(t) = \cos(\omega t + \phi) \quad \text{où } \omega \text{ et } \phi \text{ sont deux réels fixés,}$$

$$i(x) = \ln(4x^2 - x - 3), \qquad j(t) = e^{-\frac{1}{1+t}}, \qquad k(u) = \sqrt{u\ln(u)}.$$

Exercice 5. Un camion doit faire un trajet de 300km. On suppose qu'il roule à vitesse constante. Sa consommation de gasoil, estimée en litres par heure, est de $\left(7,5 + \dfrac{v^2}{1080}\right)$, où v désigne sa vitesse en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

1. Exprimer la consommation totale de gasoil sur le trajet en fonction de la vitesse v du camion.
2. Quelle doit être la vitesse du camion pour que le prix du trajet soit minimal ?
3. Le prix du gasoil est de $1,40$ euros par litre. Quel est alors le prix du trajet ?

Exercice 6. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 2}$.
1. Développer le produit $(x+2)(x-1)^2$.
2. En déduire l'ensemble de définition de f.
3. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f. Calculer la dérivée de f, puis dresser son tableau de variations.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 0$.

Exercices complémentaires

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes :

$$\ln(x+1) = \ln(3x+1) - \ln(x), \qquad \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + \frac{1}{6}\ln\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{2}\ln(2), \qquad \exp(2\ln(4x^2+1)) = 9,$$

$$2^{2x} = 4^{1-4x}, \qquad 27^{x+1} = 9, \qquad 9^{x^2} = 3^{3x-1}, \qquad (x^2+x-1)^x = 1,$$

$$(x+3)^x = (4x+6)^x, \qquad (x^2-5x+7)^x = 1, \qquad \log\left(2900\sqrt{e^{(x^2-3)\ln(10)}}\right) = 5 + \log(29).$$

Exercice 8. Résoudre les inéquations suivantes :

$$\ln(\sqrt{x}) < 2, \qquad \ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) > 0, \qquad e^{3x+1} > 0, \qquad 10^{-5x+2} < 1, \qquad (e^x - 1)\ln(x) > 0.$$

Exercice 9. Déterminer le domaine de définition et dériver les fonctions définies par :

$f(x) = x^{1/2} \cdot 2^x$, $\quad g(x) = \sqrt{e^{2x^2+2x-4} - 1}$, $\quad h(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t)$ où ω et α sont des réels fixés.

Exercice 10. Un agriculteur veut clôturer un champ rectangulaire le long d'une rivière qui coule le long d'une droite. Il ne dispose que de 1000 mètres de clôture et veut obtenir un champ d'aire maximale. Sachant qu'il n'a pas besoin de mettre une clôture le long de la rivière, quelles sont les dimensions du champ, et quelle est son aire ?

Exercice 11. Deux voitures B et C circulent en sens opposé sur une même route pendant la nuit. La route peut être décrite par le graphe de la fonction $p(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$. Une personne se trouve au point A de coordonnées $(-2, 2)$. Les voitures ont allumé leurs phares.
1. Étudier la fonction p sur l'intervalle $[-5, 5]$.
2. Représenter graphiquement la situation décrite ci-dessus.
3. Depuis quels points les voitures B et C éblouissent-elles la personne se trouvant en A ?