

Lista de exercícios 1 - Espaços de Banach e operadores lineares

Exercício 1. Seja X um espaço vetorial normado (evn). Um subconjunto $A \subseteq X$ é dito convexo quando

$$x, y \in A \implies [x, y] := \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\} \subset A.$$

Mostre que a bola $B_X(0, r)$ é convexa para todo $r > 0$.

Exercício 2. Seja X um espaço normado não trivial. Mostre que X é Banach se, e somente se, a esfera $S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ é completa.

Exercício 3. Mostre que é possível definir uma norma em qualquer espaço vetorial.

Exercício 4. Prove que subespaços próprios de espaços normados têm interior vazio.

Exercício 5. Mostre que, se X é um espaço vetorial normado de dimensão infinita, então qualquer conjunto $Y \subset X$ que contém um subconjunto aberto não-trivial de X não pode ser compacto. Conclua que espaços vetoriais normados de dimensão infinita não podem ser localmente compactos.

Exercício 6. Seja X evn de dimensão finita e $M \subset X$ subespaço próprio de X . Mostre que existe $y \in X$ com $\|y\| = 1$ tal que $\|y - x\| \geq 1$ para todo $x \in M$.

Exercício 7. Seja Ω um conjunto. Verifique que a norma uniforme é de fato uma norma em $B(\Omega)$ e mostre que $(B(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ é Banach.

Exercício 8. Mostre que o conjunto $\{f \in C[a, b] : f(x) > 0, \forall x \in [a, b]\}$ é aberto em $C[a, b]$.

Exercício 9. Mostre que

$$\|\psi\|_1 = \int_0^1 |\psi(t)| dt$$

define uma norma em $C[0, 1]$ e que $\|\psi\|_1 \leq \|\psi\|_\infty$ para toda função $\psi \in C[0, 1]$. Mostre também que $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ não é completo. Existe $C > 0$ tal que $\|\psi\|_\infty \leq C\|\psi\|_1$ para toda $\psi \in C[0, 1]$?

Exercício 10. Denote por $C^1[a, b]$ o espaço das funções continuamente diferenciáveis $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com a norma

$$\|\psi\|_{C^1} := \sup_{t \in [a, b]} |\psi(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |\psi'(t)|.$$

Verifique que $\|\cdot\|_{C^1}$ é uma norma e que $(C^1[a, b], \|\cdot\|_{C^1})$ é Banach. Generalize para funções de classe C^r . Analise a convergência em $C[0, 1]$ e em $C^1[0, 1]$ da sequência $(\phi_n)_n$ dada por $\phi_n(t) = t^n/n - t^{n+1}/(n+1)_n$.

Exercício 11. Mostre que, para quaisquer $p, q \in [1, \infty)$ com $p \leq q$, vale $\ell_p \subset \ell_q$.

Exercício 12. Mostre que $\overline{c_{00}}^{\|\cdot\|_\infty} = c_0$ e que $\overline{c_{00}}^{\|\cdot\|_p} = \ell_p$, para todo $p \in [1, \infty)$.

Exercício 13. Seja X um evn. Mostre que são equivalentes:

- (i) X é separável.
- (ii) B_X é separável.
- (iii) S_X é separável.

Exercício 14. Sejam X evn e $E \subset X$. Mostre que E é separável se, e somente se, $\text{span } E$ é separável.

Exercício 15. Sejam X evn separável e $S \subset X$ denso em X . Mostre que existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ denso em X .

Exercício 16. Seja X evn. Um subconjunto $S \subset X$ é dito *total* quando $\text{span } S$ é denso em X . Mostre que X é separável se, e somente se, existe $S \subset X$ total, enumerável e l.i.

Exercício 17. Mostre que $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$ é separável para todo $p \in [1, \infty]$.

Exercício 18. Encontre uma base de Schauder para o espaço $c \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ das sequências convergentes.

Exercício 19. Mostre que, para qualquer $p \in [1, \infty)$, o dual de ℓ_p é isometricamente isomorfo a ℓ_{p^*} .

Exercício 20. Mostre que o dual de c_0 é isometricamente isomorfo a ℓ_1 .

Exercício 21. Seja X evn. Suponha que $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{L}(X)$ e $x_n \rightarrow x$ em X . Mostre que $T_n x_n \rightarrow Tx$.

Exercício 22. Sejam X evn, G subespaço de X e Y espaço de Banach. Dado um operador linear contínuo $T : G \rightarrow Y$, mostre que existe uma única extensão linear contínua $\bar{T} : \bar{G} \rightarrow Y$ de T ao fecho de G . Mais ainda, $\|\bar{T}\| = \|T\|$ e, se T é isometria, então \bar{T} também é.

Exercício 23. Sejam X um espaço de Banach, Y evn e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ uma isometria linear. Mostre que $T(X)$ é fechado em Y .

Exercício 24. Sejam X, Y evn e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ sobrejetor tal que existe $b > 0$ satisfazendo $\|Tx\| \geq b\|x\|$ para todo $x \in X$. Mostre que T é invertível e $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Exercício 25. Sejam X Banach e $S, T \in \mathcal{L}(X)$ tais que T é invertível e $\|T - S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$. Mostre que S é invertível. Conclua que o conjunto dos operadores invertíveis de $\mathcal{L}(X)$ é aberto em $\mathcal{L}(X)$.

Exercício 26. Sejam X, Y espaços métricos compactos, $\phi : Y \rightarrow X$ contínua e considere o operador de composição $T_\phi : C(X) \rightarrow C(Y)$ dado por $T_\phi f = f \circ \phi$. Mostre que:

- (a) T_ϕ é isometria se, e somente se, ϕ é sobrejetora.
- (b) T_ϕ é sobrejetor se, e somente se, ϕ é injetora.

Exercício 27 (Funcional linear contínuo que não atinge a norma). Considere o funcional $\phi : c_0 \rightarrow \mathbb{K}$ dado por

$$\phi(x_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}.$$

Mostre que:

- (a) ϕ está bem definido, $\phi \in (c_0)'$ e $\|\phi\| = 1$;
- (b) Não existe $x \in c_0$ tal que $\|x\|_\infty \leq 1$ e $\|\phi\| = |\phi(x)|$.

Exercício 28 (Operadores de posto finito). Sejam X, Y evn. Dizemos que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tem *posto finito* quando $\dim \text{Im } T < \infty$. Prove que:

- (a) T tem posto finito se, e somente se, existem $n \in \mathbb{N}$, funcionais $\phi_1, \dots, \phi_n \in X'$ e vetores $y_1, \dots, y_n \in Y$ tais que $T = \phi_1 \otimes y_1 + \dots + \phi_n \otimes y_n$.
- (b) O conjunto dos operadores de posto finito de X em Y é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(X, Y)$. Fechado?

Exercício 29. Dados X Banach e $a \in \mathbb{K}$, seja $e^{aT} : X \rightarrow X$ a aplicação dada pela série

$$e^{aT} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(aT)^n}{n!}.$$

Mostre que e^{aT} está bem definida e $e^{aT} \in \mathcal{L}(X)$, com $\|e^{aT}\| \leq e^{|a|\|T\|}$.

Exercício 30. Sejam X Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$ com $\|T\| < 1$. Seja $S : X \rightarrow X$ a aplicação dada pela série $S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$. Mostre que S está bem definida, $S \in \mathcal{L}(X)$ e $S = (I - T)^{-1}$.

Exercício 31. Mostre que o operador $I\psi(t) = \int_a^t \psi(s) ds$ pertence a $\mathcal{L}(C[a, b])$. Mostre também que ele não possui autovalores, isto é, não existem $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\psi \neq 0$ contínua tais que $I\psi = \lambda\psi$.

Exercício 32. Para cada $a \in \mathbb{R}$, considere o funcional em $C[-1, 1]$ dado por

$$f_a(\psi) = \int_{-1}^1 \psi(t) dt + a\psi(0).$$

Mostre que f_a é um elemento do dual e que $\|f_a\| = 2 + |a|$.

Exercício 33. Seja X um evn. Mostre que não existem operadores $S, T \in \mathcal{L}(X)$ tais que $TS - ST = I$.

Dica: Supondo que existem tais operadores, mostre que $TS^n - S^nT = nS^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e, portanto,

$$\|S^{n-1}\| \leq \frac{2\|T\|\|S\|\|S^{n-1}\|}{n}.$$

Assim, $S^N = 0$ para todo N suficientemente grande. Com isso, chegue a uma contradição, mostrando que $0 = S^N = S^{N-1} = \dots = S$.

Exercício 34. Sejam X, Y evn, com $\dim X = \infty$ e $Y \neq \{0\}$. Construa um operador linear descontínuo $T : X \rightarrow Y$.

Exercício 35. Seja $C^\infty[a, b]$ o espaço das funções reais de classe C^∞ em $[a, b]$. Mostre que o operador derivação $D : C^\infty[a, b] \rightarrow C^\infty[a, b]$, $Df = f'$, não é limitado.

Exercício 36. Sejam X, Y evn e $T \in L(X, Y)$. Mostre que $\ker(T)$ é fechado. Verifique que $S : \ell^1 \rightarrow \ell^1$, dado por $(Sx)_n = \frac{x_n}{n}$, é limitado, mas sua imagem $\text{img}(S)$ não é fechada, e que seu operador inverso $S^{-1} : \text{img}(S) \rightarrow \ell^1$ existe e não é limitado.

Exercício 37. Sejam X evn e $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ linear. Mostre o seguinte:

- $f \in X'$ se, e somente se, existe $C > 0$ com $|f(x)| \leq C$ para todo x em alguma bola $B(x_0, r)$ em X . Generalize para operadores lineares entre espaços normados.
- Se f é descontínuo, então $f(B_X) = \mathbb{K}$.
- $f \in X'$ se, e somente se, $\ker f$ é fechado. Com um exemplo, mostre que isso pode não valer para operadores lineares.
- Se f é descontínuo, então $\ker f$ é denso.

Exercício 38. Discuta se o núcleo do funcional $f : (\ell^1, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{K}$, definido por $f(x_1, x_2, \dots) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$, é fechado.

Exercício 39. Sejam $p \in [1, \infty)$ e $(v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ uma sequência de escalares positivos (isto é, $v \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$). Defina o conjunto

$$\ell_p(v) := \left\{ (x_n)_n : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p v_n < \infty \right\}.$$

Mostre que $\ell_p(v)$ é subespaço de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Defina $\|\cdot\|_{p,v} : \ell_p(v) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\|x\|_{p,v} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p v_n \right)^{1/p}.$$

Mostre que $\|\cdot\|_{p,v}$ é uma norma em $\ell_p(v)$ e que $(\ell_p(v), \|\cdot\|_{p,v})$ é Banach. Estes espaços também são chamados ℓ_p com peso. Enuncie e demonstre um resultado análogo para *espaços c_0 com peso*.

Exercício 40. Sob quais condições sobre o peso v os espaços c_0 e $c_0(v)$ são isomorfos? Estude também o caso de $\ell_p, 1 \leq p < \infty$.

Exercício 41. Seja $X = c_0$ ou $\ell_p, 1 \leq p < \infty$. Defina o operador *shift para trás* $B : X \rightarrow X$ por $Be_n = e_{n-1}$. Mostre que B é linear, contínuo, e $\|B\| = 1$. O mesmo vale para o operador *shift para frente* $F : X \rightarrow X$ dado por $Fe_n = e_{n+1}$.

Exercício 42. Sejam $X = c_0$ ou $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ e $w = (w_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ uma sequência de escalares não-nulos (isto é, $w \in (\mathbb{K}^*)^{\mathbb{N}}$). Defina o operador *shift para trás com peso* $B_w : X \rightarrow X$ por $Be_n = w_n e_{n-1}$. Mostre que B_w é contínuo se, e somente se, $(w_n)_n$ é limitada. Calcule $\|B_w\|$. Enuncie e demonstre um resultado análogo para o *shift para frente com peso* F_w .

Exercício 43. Sejam $X = c_0$ ou $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ e $w = (w_n)_n \in (\mathbb{K}^*)^{\mathbb{N}}$. Explícite $B_w^n : X \rightarrow X$ e calcule $\|B_w^n\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 44. (Espaço Quociente) Sejam X um evn e F um subespaço fechado próprio de X . Dados $x, y \in X$, dizemos que $x \sim y$ se $x - y \in F$. Definimos $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$ e $X/F = \{[x] : x \in X\}$. Mostre que:

- (a) \sim é uma relação de equivalência.
- (b) As operações $[x] + [y] = [x + y]$ e $a[x] = [ax]$ estão bem definidas e tornam o conjunto X/F um espaço vetorial.
- (c) A expressão $\|[x]\|_{X/F} = \text{dist}(x, F) = \inf\{\|x - y\| : y \in F\}$ define uma norma em X/F .
- (d) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $\|x\|_X = 1$ e $\|[x]\|_{X/F} \geq 1 - \varepsilon$.
- (e) Se X é Banach, então X/F é Banach com a norma dada em (c).

Exercício 45 (Aplicação quociente). Seja F subespaço fechado do evn X . Defina a *aplicação quociente* $\pi : X \rightarrow X/F$ por $\pi(x) = [x]$. Demonstre os itens abaixo.

- (a) Vale $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$, ou seja, π é contínua e $\|\pi\| \leq 1$.
- (b) Dados $x \in E$ e $\varepsilon > 0$, existe $y \in X$ tal que $\pi(x) = \pi(y)$ e $\|y\| \leq \|\pi(x)\| + \varepsilon$.
- (c) $\pi(B_X) = B_{X/F}$.
- (d) $\pi \in \mathcal{L}(X, X/F)$, $\ker \pi = F$ e π é uma aplicação aberta (i.e., leva abertos em abertos).
- (e) Se $F \neq X$, então $\|\pi\| = 1$.
- (f) Para todo evn Y e todo $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, existe um único $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X/F, Y)$ tal que $T = \tilde{T} \circ \pi$. Mais ainda, $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Exercício 46. Seja X um espaço de Banach separável e F um subespaço fechado de X . Mostre que X/F é separável.