

## Lista de exercícios 2 - Teorema de Baire e suas consequências

**Exercício 1.** Sejam  $X, Y$  evn e  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Mostre que  $T$  é aberto se, e somente se,  $T(B_X) \supset B_Y(0, r)$  para algum  $r > 0$ .

**Exercício 2.** Verifique que a recíproca do TAA é verdadeira, mesmo quando os evn  $X, Y$  não são Banach.

**Exercício 3.** Sejam  $X, Y$  evn e  $T : X \rightarrow Y$  linear. Verifique que  $T$  é fechado se, e somente se, vale a implicação

$$x_n \rightarrow x \in X, Tx_n \rightarrow y \in Y \implies Tx = y.$$

**Exercício 4** (Teorema do Isomorfismo). Sejam  $X, Y$  Banach e  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Prove que, se  $\text{Im } T$  é fechada em  $F$ , então  $\text{Im } T$  é isomorfa a  $X/\ker T$ .

**Exercício 5.** Sejam  $X, Y$  espaços normados e  $T : X \rightarrow Y$  operador linear. Suponha que  $\ker T$  é fechado e  $\dim \text{Im } T < \infty$ . Prove que  $T$  é limitado.

**Exercício 6.** Sejam  $X, Y$  espaços de Banach e  $T, T_1, T_2, \dots \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Suponha que  $T_n(x) \rightarrow T(x)$  em  $Y$  para todo  $x \in X$ . Mostre que, para todo compacto  $K \subset X$ , vale  $\sup_{x \in K} \|T_n(x) - T(x)\| \rightarrow 0$ .

**Exercício 7.** Sejam  $X$  Banach e  $A \subset X'$ . Mostre que  $A$  é limitado se, e somente se,  $\sup_{\phi \in A} |\phi(x)| < \infty$ ,  $\forall x \in X$ .

**Exercício 8.** Sejam  $X$  espaço de Banach e  $(x_n) \subset X$ . Suponha que  $\sum_{n=1}^{\infty} |\phi(x_n)| < \infty$  para todo  $\phi \in X'$ . Mostre que  $\sup_{\|\phi\| \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} |\phi(x_n)| < \infty$ .

**Exercício 9.** Mostre que todo espaço métrico completo que não possui pontos isolados possui uma quantidade não-enumerável de pontos.

**Exercício 10.** Sejam  $X, Y$  Banach e  $T : X \rightarrow Y$  linear e sobrejetor.

- (a) Suponha que, para algum  $r > 0$ ,  $T(B_X(0, r))$  está contido em algum compacto de  $Y$ . Prove que  $Y$  tem dimensão finita.
- (b) Suponha que  $T$  seja limitado. Prove que, dada uma sequência  $(y_n) \subset Y$  com  $y_n \rightarrow 0$ , existe  $(x_n) \subset X$  com  $x_n \rightarrow 0$  satisfazendo  $Tx_n = y_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercício 11.** Mostre que  $T : \ell_1 \rightarrow \ell_1$  dado por  $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1/1, x_2/2, x_3/3, \dots)$  é linear, contínuo e injetor, mas que sua inversa  $T^{-1}$ , definida na imagem de  $T$ , não é um operador contínuo.

**Exercício 12.** Sejam  $X, Y$  Banach e  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  bijetor. Mostre que existem constantes  $C_1, C_2 > 0$  tais que  $C_1\|x\| \leq \|Tx\| \leq C_2\|x\|$ ,  $\forall x \in X$ .

**Exercício 13.** Seja  $X$  evn. Mostre que todo funcional  $\phi \in X' \setminus \{0\}$  é uma aplicação aberta.

**Exercício 14.** Sejam  $X, Y$  Banach e  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  sobrejetor. Mostre que existe  $C > 0$  tal que, para todo  $y \in Y$ , a equação  $Tx = y$  possui solução  $x_y$  satisfazendo  $\|x_y\| \leq C\|y\|$ .

**Exercício 15.** Sejam  $X, Y$  Banach,  $X_0$  subespaço de  $X$  e  $T : X_0 \rightarrow Y$  linear. Considere a *norma do gráfico* de  $T$ , definida por  $\|x\|_T = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ ,  $\forall x \in X_0$ . Mostre que, se  $T$  é fechado, então  $(X_0, \|\cdot\|_T)$  é Banach.

**Exercício 16.** Sejam  $X$  evn,  $Y$  Banach e  $\mathcal{X} = \mathcal{L}(X, Y)$ . Suponha que  $\|\cdot\|$  seja uma norma em  $\mathcal{X}$  tal que  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  seja Banach e que  $\|T_n\| \rightarrow 0$  implique  $\|T_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \rightarrow 0$ , para toda  $(T_n)_n \subset \mathcal{L}(X, Y)$ . Mostre que  $\|\cdot\|$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$  são equivalentes.

**Exercício 17.** Sejam  $X, Y$  evn,  $X_0$  subespaço de  $X$  e  $T : X_0 \rightarrow Y$  linear. Defina  $\|x\|_{\infty} = \max\{\|x\|_X, \|Tx\|_Y\}$  e  $\|x\|_p = (\|x\|_X^p + \|Tx\|_Y^p)^{1/p}$ ,  $p > 1$ ,  $x \in X_0$ . Mostre que  $\|\cdot\|_{\infty}$  e  $\|\cdot\|_p$  são equivalentes à  $\|\cdot\|_T$  (norma do gráfico).

**Exercício 18.** Sejam  $X, Y$  evn e  $T : X \rightarrow Y$  linear e fechado. Mostre o seguinte:

- (a) se  $T^{-1}$  existe, então ele também é fechado, donde  $T^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$ ;
- (b) se  $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ , então  $T + S$  é fechado;
- (c) se  $Y = X$ , então para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ , o núcleo  $\ker(T - \lambda I)$  é um subespaço vetorial fechado de  $X$ .