

Lista de exercícios 3 - Teoremas de Hahn-Banach

Exercício 1. Sejam X evn e $p : X \rightarrow [0, \infty)$ um funcional sublinear. Mostre que, se p é contínuo em $x = 0$, então p é contínuo.

Exercício 2. Seja $X \neq \{0\}$ evn. Mostre que $X' \neq \{0\}$.

Exercício 3. Seja X evn. Mostre que X' separa pontos de X , ou seja, para todos $x \neq y$ em X , existe $\phi \in X'$ tal que $\phi(x) \neq \phi(y)$.

Exercício 4. Sejam X e Y dois espaços normados não triviais. Use o Teorema de Hahn-Banach para mostrar que, se qualquer operador linear limitado e não-nulo $T : X \rightarrow Y$ é sobrejetor, então $\dim Y = 1$.

Exercício 5. Seja Y evn. Mostre que, se existe um evn $X \neq \{0\}$ tal que $\mathcal{L}(X, Y)$ é Banach, então Y é Banach.

Exercício 6. Sejam M um subespaço do espaço vetorial normado X e $f \in M'$ com $\|f\| = 1$. Mostre que, se existem duas extensões distintas de Hahn-Banach de f preservando a norma, então existem infinitas de tais extensões.

Exercício 7. Seja Y subespaço vetorial de X . Mostre que todo funcional linear limitado em Y é restrição de algum elemento de X' . Conclua, então, que $Y' = \{f|_Y : f \in X'\}$.

Exercício 8. Sejam X, Y evn e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Prove que $\|T\| = \sup\{|\phi(Tx)| : \phi \in B_{Y'}, x \in B_X\}$.

Exercício 9. Sejam X um evn e $Y \subset X$ um subespaço. Mostre que Y é denso em X se, e somente se, o único funcional $\phi \in X'$ que se anula em Y é o funcional nulo.

Exercício 10. (Philips) Sejam X evn e $Y \subset X$ um subespaço. Prove que todo operador linear limitado $T \in \mathcal{L}(F, \ell_\infty)$ possui uma extensão $\tilde{T} : \mathcal{L}(X, \ell_\infty)$ que preserva a norma, isto é, $\tilde{T}|_Y = T$ e $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Exercício 11. Prove que todo evn separável é isomorfo isometricamente a algum subespaço de ℓ_∞ .

Exercício 12. Sejam X evn e $B \subset X$ tal que $\phi(B)$ é limitado para todo $\phi \in X'$. Mostre que B é limitado.

Exercício 13. Sejam X evn e $\emptyset \neq M \subset X$. O anulador de M é definido por $M^\perp = \{\phi \in X' : \phi|_M \equiv 0\}$. Mostre que:

- (a) M^\perp é um subespaço fechado de X .
- (b) Se M é subespaço de E , então M' é isomorfo isometricamente a X'/M^\perp .
- (c) Se M é subespaço fechado de X , então M^\perp é isomorfo isometricamente a $(E/M)'$.

Exercício 14. Sejam X evn e $Y, Z \subset X$ subespaços distintos, sendo um deles fechado. Mostre que $Y^\perp \neq Z^\perp$.

Exercício 15. Dados X evn e $x_0 \in X$, mostre que o conjunto $\{\phi \in X' : \|\phi\| = \|x_0\| \text{ e } \phi(x_0) = \|x_0\|^2\}$ é não-vazio, convexo e fechado em X' .

Exercício 16. Sejam X evn, $F \subset X$ subespaço e $T \in \mathcal{L}(F, B(X))$, onde $B(X)$ é o espaço das funções $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ limitadas. Mostre que existe $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X, B(X))$ extensão de T tal que $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Exercício 17. Sejam X evn e $Y \subset X$. Mostre que Y é subespaço próprio *maximal* de X (i.e., Y é subespaço e, se $Y \subsetneq Z$ e Z é subespaço de X , então $Z = X$) se, e só se, $Y = [\phi = 0]$ para algum $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ linear não nulo.

Exercício 18. Sejam X evn e $C \subset X$ aberto e convexo, com $0 \in C$. Mostre que o funcional de Minkowski p_C é um funcional sublinear e que satisfaz:

- (i) existe $M > 0$ tal que $0 \leq p_C(x) \leq M\|x\|$ para todo $x \in X$;
- (ii) $C = \{x \in X : p_C(x) < 1\}$.

Exercício 19. Seja X evn real. Prove que o funcional de Minkowski da bola aberta $B_X = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ coincide com $\|\cdot\|$.

Exercício 20. Seja $S = \{x_i \in X : i \in I\}$ um conjunto de vetores de um evn X . Prove que um elemento $x \in X$ pertence a $\overline{[S]}$ se, e somente se, $\phi(x) = 0$ para todo $\phi \in X'$ tal que $\phi(x_i) = 0$ para todo $i \in I$.

Exercício 21. Seja X evn. Prove que um funcional linear $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ é limitado se, e somente se, $\ker f$ é fechado.