

Lista de exercícios 4 - Dualidade e reflexividade

Exercício 1. Sejam X, Y evn e $T \in L(X, Y)$. Mostre que $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \sup_{f \in S_{X'}} |f(Tx)|$.

Exercício 2. Seja X evn e $\phi \in X'$. Calcule o funcional adjunto ϕ' de ϕ .

Exercício 3. Sejam X, Y Banach e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que T' é sobrejetor. Mostre que existe $r > 0$ tal que $T'(B_{Y'}(0, r)) \supset B'_X(0, r)$. Conclua que $\|Tx\| \geq r\|x\|$ para todo $x \in X$. Use isso para mostrar que T é invertível se, e somente se, T' é invertível.

Exercício 4. Sejam X, Y espaços de Banach. Mostre o seguinte:

- Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ é isomorfismo, então $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ é isomorfismo e $(T')^{-1} = (T^{-1})'$;
- Se, para algum $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, tem-se que $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ é isomorfismo, então X e Y são isomorfos;
- $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ é isomorfismo isométrico se, e somente se, $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ é isomorfismo isométrico;
- A correspondência $T \in \mathcal{L}(X, Y) \mapsto T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem.

Exercício 5. Sejam X evn e $B \subset E'$. Defina ${}^\perp B := \{x \in E : \phi(x) = 0 \text{ para todo } \phi \in B\}$. Mostre o seguinte:

- ${}^\perp B$ é subespaço fechado de E ;
- Para todo Y evn e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, vale:
 - $\ker T = {}^\perp(\text{Im } T')$;
 - $\ker T' = (\text{Im } T)^\perp$;
 - $\overline{\text{Im } T} \subset {}^\perp(\ker T')$, em particular T sobrejetora $\implies T'$ injetora.

Exercício 6. Seja X Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$. Mostre que, se $\text{Im } T$ é fechada, então $\overline{\text{Im } T'} = (\ker T)^\perp$.

Exercício 7. Sejam X evn, M subespaço de X e \mathcal{N} subespaço de X' . Mostre o seguinte:

- $M \subset {}^\perp(M^\perp)$ e, se M for fechado, então $M = {}^\perp(M^\perp)$;
- $\mathcal{N} \subset ({}^\perp \mathcal{N})^\perp$ e, se X for reflexivo e \mathcal{N} fechado, então $\mathcal{N} = ({}^\perp \mathcal{N})^\perp$.

Exercício 8. Sejam X, Y, Z evn, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Mostre que $(S \circ T)' = T' \circ S'$.

Exercício 9. Sejam X, Y Banach. Mostre o seguinte:

- $X' \times Y'$ é isomorfo a $(X \times Y)'$;
- Se X e Y são reflexivos, então $(X \times Y)$ é reflexivo.

Exercício 10. Sejam X reflexivo e $\phi \in X'$. Mostre que ϕ atinge a norma, isto é, $\exists x \in S_X$ com $\phi(x) = \|\phi\|$.

Exercício 11. Mostre que o espaço c das seqüências convergentes não é reflexivo.

Exercício 12. Prove que todo subespaço fechado de um espaço reflexivo é reflexivo.

Exercício 13. Mostre que X é reflexivo se, e somente se, X' é reflexivo.

Exercício 14. Sejam X, Y Banach. Mostre que, se $T : X \rightarrow Y$ e $S : Y' \rightarrow X'$ são operadores lineares que satisfazem $\phi(Tx) = (S\phi)x$ para todo $x \in X$ e todo $\phi \in Y'$, então T e S são limitados e $S = T'$.

Exercício 15. Tome $p \in [1, \infty)$ e considere o shift para trás $B : \ell_p \rightarrow \ell_p$ dado por $B(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. Identificando $(\ell_p)^\perp = \ell_{p^*}$, mostre que $B' = F : \ell_{p^*} \rightarrow \ell_{p^*}$ é o shift para frente $F(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$.

Exercício 16. Sejam X, Y evn e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Mostre que:

- T' é injetor se, e somente se, $\text{Im } T$ é densa em Y ;
- se $\text{Im } T'$ é densa em X' , então T é injetor, e a recíproca vale se X é reflexivo.

Exercício 17. Seja $T : X \rightarrow Y$ linear e considere $T'' : X'' \rightarrow Y''$. Enxergando X em X'' e Y em Y'' , mostre que $T''|_X = T$. Se X é reflexivo, mostre que $T'' = T$.

Exercício 18. Prove que reflexividade é preservada por isomorfismos.

Exercício 19. Sejam X evn, Y Banach e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Mostre que T possui uma única extensão $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X}, Y)$, onde \widehat{X} é o completamento de X , e $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.