

Lista de exercícios 5 - Topologias fraca e fraca*

Exercício 1. Sejam X evn, $Y \subset X$ subespaço, $(x_n) \subset Y$ e $x \in Y$. Prove que $x_n \rightharpoonup x$ em $Y \iff x_n \rightharpoonup x$ em X .

Exercício 2. Analise a convergência fraca da base canônica (e_n) nos espaços c_{00} , ℓ_1 , ℓ_p com $p \in (1, \infty)$ e ℓ_∞ .

Exercício 3. Sejam X Banach e $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \rightharpoonup x$. Seja (z_n) dada por $z_n = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mostre que $z_n \rightharpoonup x$.

Exercício 4. Prove que todo conjunto não-vazio e aberto na topologia fraca de um espaço de dimensão infinita é ilimitado. Use isso para mostrar que as topologias fraca e da norma nunca coincidem em dimensão infinita.

Exercício 5. Sejam X, Y Banach. Mostre que um operador linear $T : X \rightarrow Y$ é (fortemente) contínuo se, e somente se, $T : (X, \sigma(X, X')) \rightarrow (Y, \sigma(Y, Y'))$ é contínuo (i.e., T é *fracamente contínuo*).

Exercício 6. Considere o funcional linear $\phi : \ell_1 \rightarrow \mathbb{K}$ dado por $\phi(a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Mostre que ϕ é contínuo em norma mas não é contínuo na topologia fraca-estrela de $\ell_1 = (c_0)'$. Conclua que o exercício anterior não vale para a topologia fraca*.

Exercício 7. Uma sequência $(x_n)_n$ num evn X é dita *fracamente de Cauchy* quando, para cada $\phi \in X'$, a sequência $(\phi(x_n))_n$ for de Cauchy em \mathbb{K} . Diz-se que X é *fracamente sequencialmente completo* quando toda sequência fracamente de Cauchy em X for fracamente convergente.

- (a) Mostre que toda sequência fracamente de Cauchy é limitada.
- (b) Prove que espaços reflexivos são fracamente sequencialmente completos.

Exercício 8. Seja X evn reflexivo e $Y \subset X$ subespaço fechado. Prove que Y e X/Y são reflexivos.

Exercício 9. Um evn X é dito *espaço de Schur* quando, em X , convergência fraca e forte coincidem. Prove:

- (a) Subespaços de espaços de Schur são de Schur.
- (b) A propriedade de “ser de Schur” é preservada por isomorfismos.
- (c) Um espaço reflexivo é de Schur se, e somente se, tem dimensão finita.
- (d) Um espaço que contém um subespaço reflexivo de dimensão infinita não pode ser de Schur.

Exercício 10. (Teorema de Schur) Prove que ℓ_1 é espaço de Schur.

Exercício 11. Seja X evn, $(x_n) \subset X$ e $x \in X$. Mostre que, se $x_n \rightharpoonup x$, então $x \in \overline{\text{span}(x_1, x_2, \dots)}$.

Exercício 12. Seja X evn com $\dim X = \infty$. Prove que $\overline{S_X}^{\sigma(X, X')} = \overline{B}_X$, isto é, o fecho de S_X na topologia fraca de X coincide com \overline{B}_X .

Exercício 13. (Teorema de Mazur) Sejam X evn e $K \subset X$ convexo. Prove que o fecho de K na topologia forte coincide com o fecho de K na topologia fraca. Conclua que K é fechado forte se, e somente se, é fechado fraco.

Exercício 14. Sejam X evn e $\mathcal{A} \subset X'$ subespaço. Prove que $(X, \sigma(X, \mathcal{A}))' = \mathcal{A}$, isto é, os únicos funcionais lineares $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ contínuos na topologia fraca $\sigma(X, \mathcal{A})$ são os elementos de \mathcal{A} .

Exercício 15. Seja X evn. Prove que o mergulho canônico $J_X : (X, \sigma(X, X')) \rightarrow (X'', \sigma(X'', X'))$ é um homeomorfismo sobre a sua imagem. Conclua que, se X é reflexivo, então \overline{B}_X é fracamente compacta.

Exercício 16. Prove que, em qualquer espaço reflexivo de dimensão infinita, há sequências fracamente convergentes que não são fortemente convergentes.

Exercício 17. Seja X evn. Dizemos que um subconjunto $K \subset X$ é *fracamente limitado* quando, para todo $f \in X'$, o conjunto $f(K)$ é limitado em \mathbb{K} . Supondo que X seja Banach, prove que:

- (a) $K \subset X$ é fracamente limitado se, e somente se, K é limitado em norma.
- (b) Se $K \subset X$ é fracamente compacto, então K é limitado em norma.

Exercício 18. Seja X evn reflexivo e $K \subset X$. Prove que K é fracamente compacto se, e somente se, K é fracamente fechado e limitado (fortemente).

Exercício 19. Sejam X evn e $\mathcal{K} \subset X'$. Prove que, se \mathcal{K} é fechado fraco* e limitado (fortemente), então \mathcal{K} é fraco* compacto. Verifique que vale a recíproca se X for Banach.

Exercício 20. Seja X evn separável. Mostre que toda sequência $(f_n) \subset X'$ limitada possui subsequência fracamente* convergente.

Exercício 21. Seja X evn com $\dim X = \infty$. Mostre que tanto a topologia fraca em X quanto a topologia fraca* em X' não são geradas por normas.