Lista de exercícios 6 - Espaços de Hilbert

Exercício 1. Sejam X, Y EPIs.

(a) Use a identidade de polarização para mostrar que toda isometria linear bijetora $T : X \to Y$ é unitária.

(b) Mostre que todo operador unitário é uma isometria, logo invertível, e que seu operador inverso também é unitário.

Exercício 2. Seja X EPI complexo. Se $T : X \to X$ é linear e $\langle Tx, x\rangle = 0$ para todo $x \in X$, mostre que $T = 0$.

Exercício 3. Sejam X EPI e $Y \subset X$ subespaço. Mostre que $x \in Y^\perp$ se, e somente se, $\|x - y\| \geq \|x\|$ para todo $y \in Y$.

Exercício 4. Sejam X EPI e $Y \subset X$ subespaço completo. Mostre que $Y = Y^{\perp\perp}$.

Exercício 5. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $M \subset \mathcal{H}$ um subconjunto. Mostre que $\overline{\operatorname{span}(M)} = \mathcal{H} \iff M^\perp = \{0\}$.

Exercício 6. Sejam $\mathcal{H}$ Hilbert e $X \subset \mathcal{H}$ um subespaço. Mostre que:

(i) $X^{\perp\perp} = \overline{X}$.

(ii) X é denso em $\mathcal{H}$ se, e somente se, $X^\perp = \{0\}$.

Exercício 7. Verifique que em todo espaço vetorial X pode-se definir um produto interno. Mais ainda, para cada base de Hamel $\mathcal{B}$ de X, pode-se definir um produto interno em X de modo que os vetores de $\mathcal{B}$ sejam ortogonais.

Exercício 8. Seja $\mathcal{B} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base ortonormal do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Prove que, para toda sequência $(a_n) \in \ell_2$, existe $x \in \mathcal{H}$ tal que $a_n = \langle x, x_n\rangle$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, e $\|x\| = \|(a_n)\|_2$.

Exercício 9. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert, X subespaço de $\mathcal{H}$, Y espaço de Banach e $T : X \to Y$ operador linear contínuo. Mostre que existe um operador linear contínuo $\widehat{T} : \mathcal{H} \to Y$ que estende T e preserva a norma.

Exercício 10. Mostre que a extensão do exercício anterior em geral não é única. Mostre (sem usar o Teorema de Hahn-Banach) que, se $Y = \mathbb{K}$, então a extensão é única. Este resultado é um tipo de Teorema de Hahn-Banach para espaços de Hilbert.

Exercício 11. Mostre que o dual de um espaço de Hilbert também é espaço de Hilbert. Use isso para mostrar que espaços de Hilbert são reflexivos.

Exercício 12. Sejam $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ Hilbert. Mostre que $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é unitário se, e somente se, $U^{-1} = U^*$, isto é, $UU^* = U^*U = I$.

Exercício 13. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Verifique que $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$. Conclua o seguinte.

(a) $T^*T = 0$ se, e somente se, $T = 0$.

(b) Se T é normal, então $\|T^2\| = \|T\|^2$.

Exercício 14. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert complexo e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Mostre que T é autoadjunto se, e somente se, $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Exercício 15. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ autoadjunto. Mostre que $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = 1\}$.

Exercício 16. Encontre o adjunto de Hilbert do shift para trás $B : \ell_2 \to \ell_2$, $B(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$, $\forall\,(x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$.

Exercício 17 (Hellinger-Toeplitz)**.** Sejam $\mathcal{H}$ Hilbert e $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linear satisfazendo $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$, para todos $x, y \in \mathcal{H}$. Mostre que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e conclua que T é autoadjunto.

Exercício 18. Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert e $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ linear. Suponha que exista $S : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$, não necessariamente linear, satisfazendo $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$, para todos $x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{H}_2$. Mostre que S é linear, T e S são limitados e $S = T^*$.

Exercício 19. Enuncie e demonstre o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Exercício 20. Obtenha o Teorema de Lax-Milgram como consequência do Teorema de Stampacchia.

Exercício 21 (Teorema de Lax-Milgram para espaços de Banach)**.** Sejam X, Y Banach, com Y reflexivo, e $B : X \times Y \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear contínua, coerciva e não-degenerada. Mostre que uma condição necessária e suficiente para que todo funcional $\phi \in Y'$ tenha representação única da forma

$$\phi(y) = B(x_0, y),\ \forall\, y \in Y,$$

para algum $x_0 \in X$, é a existência de uma constante $\beta > 0$ tal que

$$\sup\{|B(x,y)| : \|y\| = 1\} \geq \beta\|x\|,\ \forall\, x \in X.$$

Exercício 22. Prove que toda sequência ortonormal em um espaço de Hilbert converge fracamente para zero.

Exercício 23. (a) Prove que, se $x_n \rightharpoonup x$ e $y_n \to y$ em um EPI X, então $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.

(b) Dê um exemplo em que $x_n \rightharpoonup x$ e $y_n \rightharpoonup y$ em X, sem que $(\langle x_n, y_n\rangle)_n$ seja convergente.

Exercício 24. Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert e denote por $\mathcal{S}_L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ o espaço das formas sesquilineares limitadas $B : \mathcal{H}_\times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{K}$ munido da norma $\|B\| := \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |B(x,y)|$. Prove que o operador $\Psi : \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \to \mathcal{S}_L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, dado por $(\Psi T)(x,y) = \langle Tx, y\rangle$, $\forall\, x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$, é um isomorfismo isométrico.

Exercício 25. Mostre que um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é separável se, e somente se, admite uma base ortonormal contável.

Exercício 26. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert. Mostre que $\mathcal{B} = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset \mathcal{H}$ é um conjunto ortonormal de $\mathcal{H}$ se, e somente se, vale

$$\sum_{\alpha\in\Gamma} \langle x, x_\alpha\rangle \overline{\langle y, x_\alpha\rangle},\ \forall\ x, y \in \mathcal{H}.$$

Exercício 27. Prove que espaços de Hilbert são fracamente completos.

Exercício 28 (Riesz-Fischer)**.** Prove que todo espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é isometricamente isomorfo a ℓ_2.

Exercício 29. Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert. Mostre que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tem posto finito se, e somente se, $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tem posto finito. Neste caso, $\dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T^*$.

Exercício 30. Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert, $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Prove os seguintes itens.

(a) $(S+T)^* = S^* + T^*$.

(b) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$.

(c) $(TS)^* = S^* T^*$ supondo $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$.