Lista de exercícios 7 - Introdução à Teoria Espectral

Exercício 1. Sejam X, Y EVN. Mostre que $\mathcal{K}(X,Y)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(X,Y)$.

Exercício 2. Sejam X Banach, $T \in \mathcal{L}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Suponha que:

- $T_\lambda^{-1} : T_\lambda(X) \to X$ exista;
- $T_\lambda^{-1} : T_\lambda(X) \to X$ seja contínuo;
- $T_\lambda(X)$ seja denso em X.

Prove que $T_\lambda(X) = X$ e, portanto, $\lambda \in \rho(T)$.

Exercício 3. Mostre que o operador $T : \ell_2 \to \ell_2$, $T(a_k)_k = (a_k/k)_k$, é compacto mas não é de posto finito.

Exercício 4. Decida se o operador $T : \ell_2 \to \ell_2$ dado por $T(a_k)_k = (a_1, 0, a_3, 0, \dots)$ é compacto ou não.

Exercício 5 (Operadores integrais)**.** Seja $K : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Considere o operador $T : C[a,b] \to C[c,d]$ dado por

$$(Tf)(t) = \int_a^b K(s,t)f(s)ds,\ \forall t \in [c,d], f \in C[a,b].$$

Mostre que T está bem definido, é linear e é compacto.

Exercício 6. Sejam $1 \le p < \infty$ e $T : (C[a,b], \|\cdot\|_p) \to (C[c,d], \|\cdot\|_\infty)$ o operador integral definido exatamente como no exercício anterior. Mostre que T está bem definido, é linear e é compacto.

Exercício 7. Prove que $\mathcal{K}(X, \ell_1) = \mathcal{L}(X, \ell_1)$ para todo espaço reflexivo X.

Exercício 8. Prove que $\mathcal{K}(c_0, X) = \mathcal{L}(c_0, X)$ para todo espaço reflexivo X.

Exercício 9. Seja $(\lambda_n) \in c_0$. Construa um operador compacto T tal que $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Exercício 10. Se X é reflexivo e Y é EVN, sabemos que $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ é compacto se, e somente se, vale

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } X \implies Tx_n \to Tx \text{ em } Y.$$

Mostre com um contra-exemplo que a reflexividade de X é hipótese essencial nesse resultado.

Exercício 11. Sejam X EVN, $\mathcal{H}$ Hilbert e $T \in \mathcal{K}(X, \mathcal{H})$. Mostre que existe uma sequência de operadores de posto finito que converge para T em $\mathcal{L}(E, \mathcal{H})$.

Exercício 12. Sejam X espaço de Banach complexo, $T \in \mathcal{L}(X,X)$ e $n \in \mathbb{N}$. Prove que $\sigma(T^n) = \{\lambda^n : \lambda \in \sigma(T)\}$.

Exercício 13. Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert complexo e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Mostre que $\lambda \in \sigma(T) \iff \bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$.

Exercício 14. Considere o operador de Volterra $T : C[0,1] \to C[0,1]$ definido por $(Tf)(t) = \int_0^t$, $\forall\, t \in [0,1]$, $f \in C[0,1]$. Prove que T é compacto e $\sigma(T) = \{0\}$. Conclua que, para dados $\lambda \neq 0$ e $g \in C[0,1]$, a equação $Tf - \lambda f = 2025g$ possui solução única.

Exercício 15. Sejam $\mathcal{H}$ Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. O *espectro aproximado* de T, denotado por $\sigma_a(T)$, é o conjunto formado pelos escalares λ tais que existe uma sequência de vetores unitários $(h_n)_n$ em $\mathcal{H}$ com $T_\lambda h_n \to 0$. Prove que $\sigma_a(T) \subset \sigma(T)$ e que, quando T é autoadjunto, vale a igualdade $\sigma_a(T) = \sigma(T)$.

Exercício 16. Seja X Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$ invertível com $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Mostre que $\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(T)\}$.

Exercício 17. Sejam X Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$.

(a) Suponha que T é idempotente (i.e., $T^2 = T$). Mostre que $\sigma(T) \subset \{0,1\}$. Analise o que ocorre com o espectro se T é idempotente mas distinto do operador nulo e da identidade.

(b) Mostre que, se $T^n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então $\sigma(T) = \{0\}$. Analise o espectro de $T : \ell_p \to \ell_p$, $1 \le p \le \infty$, dado por $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$.

Exercício 18. Sejam $\mathcal{H}$ Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ autoadjunto.

(a) Mostre que $\lambda \in \sigma(T)$ se, e somente se, existe $(x_n) \subset \mathcal{H}$, com $\|x_n\| = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, satisfazendo $T_\lambda x_n \to 0$.

(b) Mostre que $\lambda \in \sigma(T)$ se, e somente se, $\inf_{\|x\|=1} \|T_\lambda x\| = 0$.

(c) As caracterizações em (a) e (b) acima não valem para todo operador (embora valham para operadores normais). Verifique isto ao considerar o shift à direita em ℓ^2, mostrar que zero pertence ao seu espectro, mas como esse operador é uma isometria, (a) e (b) não valem para $\lambda = 0$.

Exercício 19. Seja $\mathcal{H}$ Hilbert, com $\dim \mathcal{H} = \infty$, e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Mostre que, se existe $C > 0$ tal que $\|Tx\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$, então T não é compacto.

Exercício 20. Seja $\mathcal{H}$ Hilbert, fixe $y \in \mathcal{H}$ com $\|y\| = 1$ e defina $T_y : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $T_y x = \langle x, y \rangle y$. Calcule $\sigma(T_y)$.

Exercício 21. Considere uma matriz infinita

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

satisfazendo $C := \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}|^2 < \infty$. Então A induz o operador $T : \ell_2 \to \ell_2$, $Tx = Ax$, $\forall\, x \in \ell_2$, isto é,

$$T(x_n)_n = \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{1j} x_j, \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{2j} x_j, \dots \right) = \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij} x_j \right)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Mostre que T é compacto.

Exercício 22. Seja $(\lambda_n)_n$ uma sequência de números reais. Defina $T : \ell_2 \to \ell_2$, $T(x_n) = (\lambda_n x_n)$. Sob quais condições sobre a sequência $(\lambda_k)_k$, o operador T: está bem definido? é continuo? é compacto?

Exercício 23. Sejam X, Y EVNs e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Mostre o seguinte.

(a) Se $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, vale a implicação $x_n \rightharpoonup x$ em $X \implies Tx_n \to Tx$ em Y.

(b) Se X é reflexivo, então T é compacto se, e somente se, vale a implicação do item (a) acima.

Exercício 24. Sejam $B, F \in \mathcal{L}(\ell_2)$ os shifts $B(x_n)_n = (x_{n+1})_n$ para trás e $F(x_n)_n = (0, x_1, x_2, \dots)$ para frente. Mostre que $\sigma(B) = \sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$, $\sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ e $\sigma_p(F) = \varnothing$.