Cálculo Vetorial e Geometria Analítica - 1^a Avaliação

Justifique suas respostas detalhadamente.

Nome: ______________________________ Matrícula: ______________

Questão 1. Para cada um dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ abaixo, calcule $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $2\vec{u}-3\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{u}+\vec{v}\|$, $\|\vec{u}-\vec{v}\|$, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ e $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$. Normalize os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(a) $\vec{u}=(3,-1)$, $\vec{v}=(1,4)$

(b) $\vec{u}=(1,-1,1)$, $\vec{v}=(1,2,2)$

(c) $\vec{u}=(1,-1,0)$, $\vec{v}=(-1,-1,0)$

Solução. Item (a):

$$
\begin{aligned}
\vec{u}+\vec{v} &= (3,-1)+(1,4) = (3+1,-1+4) = (4,3)\\
\vec{u}-\vec{v} &= (3,-1)-(1,4) = (3-1,-1-4) = (2,-5)\\
2\vec{u}-3\vec{v} &= 2(3,-1)-3(1,4) = (6,-2)-(3,12) = (3,-14)\\
\|\vec{u}\| &= \|(3,-1)\| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{9+1} = \|(1,4)\| = \sqrt{10}\\
\|\vec{v}\| &= \|(1,4)\| = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}\\
\|\vec{u}+\vec{v}\| &= \|(4,3)\| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5\\
\|\vec{u}-\vec{v}\| &= \|(2,-5)\| = \sqrt{2^2+(-5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}\\
\vec{u}\cdot\vec{v} &= (3,-1)\cdot(1,4) = 3\cdot 1+(-1)\cdot 4 = 3-4 = -1\\
(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) &= (4,3)\cdot(2,-5) = 4\cdot 2+3\cdot(-5) = 8-15 = -7\\
\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} &= \frac{(3,-1)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)\\
\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} &= \frac{(1,4)}{\sqrt{17}} = \left(\frac{1}{\sqrt{17}},\frac{4}{\sqrt{17}}\right)
\end{aligned}
$$

Item (b):

$$\begin{aligned}
\vec{u}+\vec{v} &= (1,-1,1)+(1,2,2)=(2,1,3)\\
\vec{u}-\vec{v} &= (1,-1,1)-(1,2,2)=(0,-3,-1)\\
2\vec{u}-3\vec{v} &= 2(1,-1,1)-3(1,2,2)=(2,-2,2)-(3,6,6)=(-1,-8,-4)\\
\|\vec{u}\| &= \|(1,-1,1)\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}\\
\|\vec{v}\| &= \|(1,2,2)\| = \sqrt{1^2+2^2+2^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3\\
\|\vec{u}+\vec{v}\| &= \|(2,1,3)\| = \sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}\\
\|\vec{u}-\vec{v}\| &= \|(0,-3,-1)\| = \sqrt{0^2+(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{0+9+1}=\sqrt{10}\\
\vec{u}\cdot\vec{v} &= (1,-1,1)\cdot(1,2,2)=1\cdot 1+(-1)\cdot 2+1\cdot 2=1-2+2=1\\
(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) &= (2,1,3)\cdot(0,-3,-1)=2\cdot 0+1\cdot(-3)+3\cdot(-1)=0-3-3=-6\\
\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} &= \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\
\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} &= \frac{(1,2,2)}{3}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

Item (c):

$$\begin{aligned}
\vec{u}+\vec{v} &= (1,-1,0)+(-1,-1,0)=(0,-2,0)\\
\vec{u}-\vec{v} &= (1,-1,0)-(-1,-1,0)=(2,0,0)\\
2\vec{u}-3\vec{v} &= 2(1,-1,0)-3(-1,-1,0)=(2,-2,0)-(-3,-3,0)=(5,1,0)\\
\|\vec{u}\| &= \|(1,-1,0)\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}\\
\|\vec{v}\| &= \|(-1,-1,0)\| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}\\
\|\vec{u}+\vec{v}\| &= \|(0,-2,0)\| = \sqrt{0^2+(-2)^2+0^2}=\sqrt{4}=2\\
\|\vec{u}-\vec{v}\| &= \|(2,0,0)\| = \sqrt{2^2+0^2+0^2}=\sqrt{4}=2\\
\vec{u}\cdot\vec{v} &= (1,-1,0)\cdot(-1,-1,0)=1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)+0\cdot 0=-1+1+0=0\\
(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) &= (0,-2,0)\cdot(2,0,0)=0\cdot 2+(-2)\cdot 0+0\cdot 0=0+0+0=0\\
\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} &= \frac{(1,-1,0)}{2}=\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},0\right)\\
\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} &= \frac{(-1,-1,0)}{2}=\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2},0\right)
\end{aligned}$$

Isto termina o exercício. $\Diamond$

Questão 2. Considere o triângulo cujos vértices são os pontos $A = (3, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $B = (3\sqrt{3}+3, 1, \sqrt{3})$ e $C = (3-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$. Determine:

(a) Os ângulos do triângulo ΔABC.

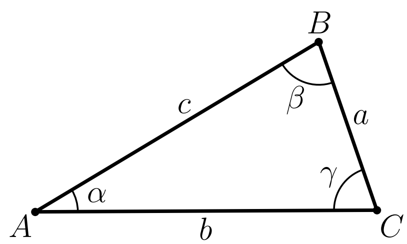
(b) O vetor projeção do menor lado sobre o maior lado.

(c) A altura do triângulo, relativa ao maior lado.

(d) A área do triângulo ΔABC.

(e) O volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Solução. Item (a): Sejam α, β, γ os ângulos e a, b, c os lados do triângulo ΔABC, como representado na figura abaixo.



De acordo com a figura, o triângulo ΔABC tem lados $a = \|\overrightarrow{BC}\|$, $b = \|\overrightarrow{AC}\|$ e $c = \|\overrightarrow{AB}\|$, onde

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3\sqrt{3}+3, 1, \sqrt{3}) - \left(3, \frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \left(3\sqrt{3}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (3-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}) - \left(3, \frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\sqrt{3}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{BC} = C - B = (3-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}) - (3\sqrt{3}+3, 1, \sqrt{3}) = (-4\sqrt{3}, 0, 0)$$

Assim, os lados de ΔABC são

$$a = \|\overrightarrow{BC}\| = \|(-4\sqrt{3}, 0, 0)\| = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + 0^2 + 0^2} = \left| -4\sqrt{3}\right| = 4\sqrt{3}$$
$$b = \|\overrightarrow{AC}\| = \left\|\left(-\sqrt{3}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right\| = \sqrt{3 + \frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$
$$c = \|\overrightarrow{AB}\| = \left\|\left(3\sqrt{3}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right\| = \sqrt{27 + \frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{36} = 6$$

Calculemos os ângulos de ΔABC. O ângulo α satisfaz

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|}.$$

Ora,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left(3\sqrt{3}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(-\sqrt{3}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = -9 + \frac{9}{4} + \frac{27}{4} = -9 + \frac{36}{4} = -9 + 9 = 0$$

Assim,

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{0}{\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|} = 0 \implies \cos\alpha = 0 \implies \alpha = 90^\circ$$

Temos então um ângulo reto no vértice A. Agora, β é o ângulo que satisfaz

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|}.$$

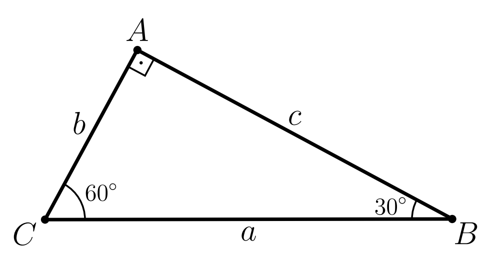
Ora,

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \left(-3\sqrt{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(-4\sqrt{3}, 0, 0) = 36.$$

Além disso, $\|\overrightarrow{BA}\| = c = 6$ e $\|\overrightarrow{BC}\| = a = 4\sqrt{3}$. Daí,

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{36}{6\cdot 4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \beta = 30^\circ.$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, deduzimos que $\gamma = 60^\circ$. Assim, nosso triângulo é melhor representado pela figura abaixo.



Item (b): Para obter o vetor projeção do menor lado b sobre o maior lado a, devemos projetar o vetor $\overrightarrow{CA}$ sobre o vetor $\overrightarrow{CB}$. Obteremos então o vetor

$$\text{proj}_{\overrightarrow{CB}}\overrightarrow{CA} = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|^2}\overrightarrow{CB}.$$

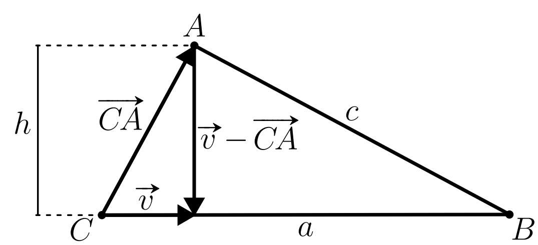
Ora, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$, donde

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (-\overrightarrow{AC})\cdot(-\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = \left(-\sqrt{3}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(-4\sqrt{3}, 0, 0\right) = 12$$

Além disso, $\|\overrightarrow{CB}\| = a = 4\sqrt{3}$. Logo,

$$\text{proj}_{\overrightarrow{CB}}\overrightarrow{CA} = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|^2}\overrightarrow{CB} = \frac{12}{(4\sqrt{3})^2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{4}(4\sqrt{3}, 0, 0) = (\sqrt{3}, 0, 0).$$

Item (c): Seja $\vec{v} = \text{proj}_{\overrightarrow{CB}}\overrightarrow{CA} = (\sqrt{3}, 0, 0)$ o vetor projeção obtido no item anterior. Considere a figura abaixo.



Então a altura h relativa ao lado maior a é o comprimento do vetor $\vec{v} - \overrightarrow{CA}$, isto é,

$$h = \|\vec{v} - \overrightarrow{CA}\| = \left\|(\sqrt{3}, 0, 0) - \left(\sqrt{3}, \frac{-3}{2}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)\right\| = \left\|\left(0, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right\| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = 3.$$

Item (d): A área do triângulo ΔABC pode ser obtida por $\frac{a\cdot h}{2} = 6\sqrt{3}$. Também podemos encontrar esta área como a metade da área do paralelogramo determinado por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, isto é,

$$\text{Área}_{\Delta ABC} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|}{2}.$$

Ora,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3\sqrt{3} & \frac{3}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{3} & \frac{3}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = 0\cdot\vec{i} - \left(\frac{27}{2}+\frac{9}{2}\right)\vec{j} + \left(\frac{9\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\vec{k} = -18\vec{j}+6\sqrt{3}\vec{k}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Área}_{\Delta ABC} &= \frac{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\|(0,-18,6\sqrt{3})\|}{2} = \frac{\sqrt{18^2+6^2 3}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2^2 3^2 3^2 + 2^2 3^2 3}}{2} = \frac{2\cdot 3\sqrt{3^2+3}}{2} = 3\sqrt{12} = 6\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Assim, $\text{Área}_{\Delta ABC} = 6\sqrt{3}$.

Item (d): O volume do paralelepípedo é o módulo do produto misto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}]$. Ora, o produto misto é

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}] = \left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right) = \|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|^2 = 18^2+(6\sqrt{3})^2$$

Assim, o volume do paralelepípedo é $18^2 + (6\sqrt{3})^2$. $\Diamond$

Questão 3. Dados os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ abaixo, determine se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é base de $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, determine as coordenadas do vetor $\vec{a} = (x, y, z)$ na base ordenada $\mathfrak{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, onde x, y, z são os três últimos dígitos da sua matrícula.

(a) $\vec{u} = (2,-3,1)$, $\vec{v} = (1,-6,4)$, $\vec{w} = (1,0,2)$

(b) $\vec{u} = (1,-1,0)$, $\vec{v} = (-1,1,0)$, $\vec{w} = (3,0,1)$

(c) $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (2,4,0)$, $\vec{w} = (1,-2,2)$

Solução. Suponhamos que $x = 7, y = 8, z = 9$ sejam os últimos dígitos da sua matrícula.

Item (a): Para verificar se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são l.i., calculamos

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -24 - 12 + 0 - (-6) - (-6) - 0 = -24 \neq 0.$$

Logo, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são l.i., donde $\mathfrak{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base de $\mathbb{R}^3$. Buscamos as coordenadas do vetor $\vec{a} = (7,8,9)$ na base $\mathfrak{B}$, isto é, procuramos escalares

$a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}\vec{a} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} &\iff (7,8,9) = a(2,-3,1) + b(1,-6,4) + c(1,0,2)\\ &\iff (7,8,9) = (2a+b+c, -3a-6b, a+4b+2c).\end{aligned}$$

Isto nos dá o sistema

$$\begin{cases} 2a+b+c = 7 \\ -3a-6b = 8 \\ a+4b+2c = 9 \end{cases}$$

Escalonando e resolvendo, encontramos as soluções $a = \frac{7}{12}$, $b = \frac{-13}{8}$ e $c = \frac{179}{24}$. Portando, $\vec{a} = \left(\frac{7}{12}, \frac{-13}{8}, \frac{179}{24}\right)_{\mathfrak{B}}$.

Item (b): Para verificar se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são l.i., calculamos

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1 - (-1)(-1)) = 0.$$

Logo, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são l.d. e, portanto, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ não é base de $\mathbb{R}^3$.

Item (c): Para verificar se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são l.i., calculamos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 1(8-0) - 0 + 1(-4-4) = 8 - 8 = 0.$$

Logo, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são l.d. e, portanto, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ não é base de $\mathbb{R}^3$. $\lozenge$