Cálculo Vetorial e Geometria Analítica - 2^a Avaliação

Justifique suas respostas detalhadamente.
O bom encadeamento lógico das contas será recompensado!

Nome: ______________________________ Matrícula: ______________

Questão 1. Determine um plano π perpendicular ao plano

$$\pi_0 : 4x - 2y + 2z - 1 = 0$$

e que passa pelo ponto $A = (-1, 2, 0)$. Encontre as equações paramétricas e cartesiana de π. Qual a distância do plano π ao ponto $B = (-1, 6, -2)$? Qual a distância do plano π à reta r abaixo?

$$r : \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Questão 2. Determine uma reta r paralela ao plano

$$\pi_0 : 4x - 2y + 2z - 1 = 0$$

e que passa pelo ponto $A = (-1, 2, 0)$. Encontre as equações paramétricas, simétrica e cartesiana de r. Qual a distância de r ao ponto $B = (-1, 6, -2)$? Qual a distância da reta r ao plano π_1 abaixo?

$$\pi_1 : 4x - 2y + 2z - 3 = 0$$

Questão 3. Determine uma reta r que passa pelo ponto $B = (-1, 6, -2)$ e forma um ângulo de $60°$ com o plano

$$\pi : 4x - 2y + 2z - 1 = 0.$$

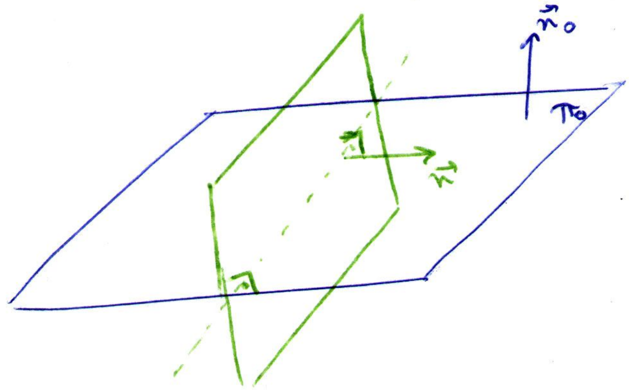
Encontre o ponto A de interseção entre r e π. Qual a distância entre A e B?

Boa prova!

Prof. Fernando Costa Jr.

CVGA - 2a Avaliação
Soluções

Q.1.)



$\pi_0 : 4x - 2y + 2z - 1 = 0$

$\vec{n}_0 = (4, -2, 2)$ vetor normal de π_0

Qualquer vetor paralelo a π_0 serve de vetor normal para π. Fazendo $x = y = 0$, encontramos $z = \frac{1}{2}$ na eq. de π_0, donde $P_1 = (0, 0, \frac{1}{2}) \in \pi_0$. Fazendo $x = z = 0$, encontramos $y = \frac{-1}{2}$, donde $P_2 = (0, -\frac{1}{2}, 0) \in \pi_0$. Logo, $\overrightarrow{P_1P_2} = (0, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})$ é paralelo a π. Podemos tomar $\vec{n} = -2\,\overrightarrow{P_1P_2} = (0, 1, 1)$ como vetor normal para π. Sua equação torna-se

$$\pi : 0(x - x_0) + 1 \cdot (y - y_0) + 1 \cdot (z - z_0) = 0,$$

onde $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, 0)$, isto é,

Eq. cartesiana

$$\pi : y - 2 + z - 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : y + z - 2 = 0}$$

Fazendo $x = t$, $z = s$, temos $y = -z + 2 \Rightarrow y = -s + 2$. Assim,

$$\boxed{\pi : \begin{cases} x = t \\ y = -s + 2 \\ z = s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}}$$

Eq. paramétricas

Continuando, como $A = (-1, 2, 0) \in \pi$, temos (como $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 4, -2)$):

$$d(B, \pi) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{|(0,1,1) \cdot (0,4,-2)|}{\sqrt{2}\,\sqrt{20}} = \frac{|4 - 2|}{2\sqrt{10}} = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

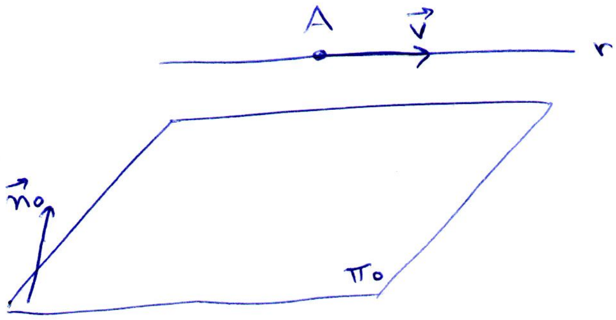
$$\Rightarrow \boxed{d(B, \pi) = \frac{1}{\sqrt{10}}}$$

Agora, como r tem a direção de $\vec{n}_0$ e $\vec{n}_0 \perp \pi_0$, segue que $r // \pi$. O ponto $P_0 = (3,1,3) \in r$, donde $(\vec{AP_0} = (4,-1,3))$

$$d(r,\pi) = d(P_0,\pi) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AP_0}|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{AP_0}\|} = \frac{|(0,1,1)\cdot(4,-1,3)|}{\sqrt{2}\,\sqrt{26}} =$$

$$= \frac{|-1+3|}{2\sqrt{13}} = \frac{2}{2\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \Rightarrow \boxed{d(r,\pi) = \frac{1}{\sqrt{13}}}$$

Q.2)



$\pi_0 : 4x - 2y + 2z - 1 = 0$

$\vec{n}_0 : (4,-2,2)$.

Na Q.1, encontramos o vetor $\vec{v} = (0,1,1)$ que é paralelo a π_0. Tomando $r : P = A + t\vec{v}$, teremos $r // \pi_0$, como requerido. Assim,

$$\boxed{r : \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}} \rightarrow \text{Eq. paramétricas}$$

As eq. simétricas de r são:

$$r : x = -1, \quad y - 2 = z.$$

A eq. cartesiana é

$$r : \begin{cases} x = -1 \\ y - 2 = z \end{cases} \iff \boxed{r : \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}}.$$

Continuando, como $A = (-1,2,0) \in r$ e $\vec{AB} = B - A = (0,4,-2)$, temos

$$d(B,r) = \frac{\|\vec{v} \times \vec{AB}\|}{\|\vec{v}\|}, \quad \|\vec{v} \times \vec{AB}\| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} \right\| = \|(-2-4)\vec{i}\| = 6$$

$$\Rightarrow \boxed{d(B,r) = \frac{6}{\sqrt{2}}}$$

Seja $\vec{n}_1 = (4,-2,2)$ vetor normal de π_1.

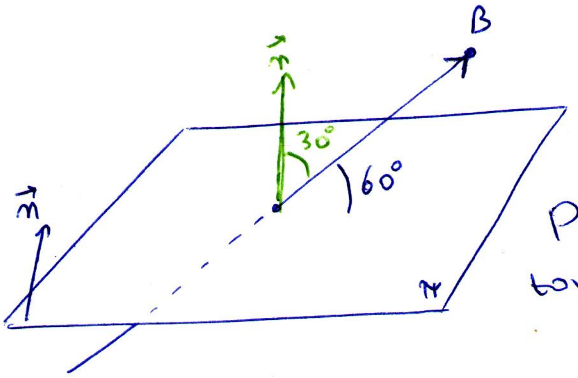
Agora, como $r \parallel \pi_0$ e $\pi_0 \parallel \pi_1: 4x - 2y + 2z - 3 = 0$, segue que $r \parallel \pi_1$. Como $P_0 = (-1,2,0) \in r$ e $P = (0,0,\frac{3}{2}) \in \pi_1$, temos

$$d(r,\pi) = d(P_0,\pi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{P_0P}|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\overrightarrow{P_0P}\|} = \frac{|(4,-2,2)\cdot(1,-2,\frac{3}{2})|}{\sqrt{24}\sqrt{1+4+\frac{9}{4}}}$$

$$\Rightarrow d(r,\pi) = \frac{|4+4+3|}{\sqrt{24}\sqrt{\frac{29}{4}}} = \frac{11}{\cancel{2}\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{29}}{\cancel{2}}} = \frac{11}{\sqrt{6\cdot 29}}$$

$$\Rightarrow \boxed{d(r,\pi) = \frac{11}{\sqrt{6\cdot 29}}}$$

Q.3.)



$\pi: 4x - 2y + 2z - 1 = 0$

$\vec{n} = (4,-2,2)$

Precisamos de um vetor diretor $\vec{v} = (a,b,c)$ para definir r.

O requerimento é

$$\cos(30°) = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{v}\|} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|(4,-2,2)\cdot(a,b,c)|}{\sqrt{24}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{24}\sqrt{a^2+b^2+c^2} = |4a-2b+2c|$$

$$\xRightarrow{\text{Elevando ao quadrado}} \frac{3}{4}\cdot 24(a^2+b^2+c^2) = (4a-2b+2c)^2$$

$$\Rightarrow 18(a^2+b^2+c^2) = 16a^2+4b^2+4c^2+2(4a)(-2b)+2(4a)(2c)+2(-2b)(2c)$$

$$\Rightarrow 18a^2+18b^2+18c^2 = 16a^2+4b^2+4c^2-16ab+16ac-8bc$$

$$\Rightarrow 2a^2+14b^2+14c^2+16ab-16ac+8bc = 0 \qquad (\div 2)$$

$$\Rightarrow a^2+7b^2+7c^2+8ab-8ac+4bc = 0.$$

Temos muitas escolhas para a, b e c, qualquer uma serve.

Tomemos $c=0$, então queremos a e b satisfazendo

$$a^2+7b^2+8ab=0 \Rightarrow a^2+8ab+7b^2=0.$$

Veja que $b=0$ implica $a=0$, mas $(0,0,0)$ não pode ser tomado como vetor diretor. Tomemos $b=1$. Então queremos a satisfazendo

$$a^2+8a+7=0.$$

Daí,

$$a=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot7}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{64-28}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{36}}{2}$$

$$\Rightarrow a=\frac{-8\pm6}{2}.$$

Existem duas possibilidades para a. Uma delas é

$$a=\frac{-8+6}{2}=\frac{-2}{2}=-1.$$

Assim, $\vec{v}=(-1,1,0)$ serve. A reta é

$$r:\begin{cases}x=-1-t\\ y=6+t\\ z=-2\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Para encontrar $r\cap\pi$, onde $\pi: 4x-2y+2z-1=0$, temos

$$4(-1-t)-2(6+t)+2(-2)-1=0$$

$$\Rightarrow -4-4t-12-2t-4-1=0 \Rightarrow 6t=-21$$

$$\Rightarrow t=\frac{-21}{6}=\frac{-7}{2} \Rightarrow t=\frac{-7}{2}.$$

Tomando $t=\frac{-7}{2}$ em r, obtemos o ponto $A=\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},-2\right)$, onde r intersecta π. Como $\vec{AB}=B-A=\left(\frac{-7}{2},\frac{7}{2},0\right)$, temos

$$d(A,B)=\|\vec{AB}\|=\sqrt{\frac{49}{4}+\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{d(A,B)=7\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

FIM 4