Introdução à Análise Real

Fernando Costa Jr.

May 13, 2025

Teorema 0.1. *Seja* $a_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $s = \sum a_n$ *converge. Então podemos somar os termos de* (a_n) *em qualquer ordem e obteremos uma nova série que também converge para* s.

Demonstração. Suponha que (a'_n) seja uma reordenação dos termos de (a_n). Para que $\sum a'_n$ convirja, basta que (s'_n) seja limitada. Ora, toda soma parcial s'_n é limitada por alguma soma parcial s_m, donde $s'_n \leq s_m \leq s$. Logo, (s'_n) é limitada e, portanto, existe a soma $s' = \sum a'_n$. Além disso, segue dessa desigualdade que $s' \leq s$.

Ora, (a_n) também pode ser vista como uma reordenação de (a'_n). Pelo mesmo argumento, concluímos que $s \leq s'$. Portanto, $s = s'$. □

Corolário 0.2. *Se* $s = \sum a_n$ *converge absolutamente, então qualquer reordenação de termos desta série também converge para* s.

Demonstração. Se $s = \sum a_n$ converge absolutamente, então suas partes positiva e negativa convergem, digamos $\sum p_n = p$ e $\sum q_n = q$. Vale $s = p - q$. Seja (a'_n) uma reordenação de (a_n) e sejam (p'_n) a parte positiva e (q'_n) a parte negativa de (a'_n). Então (p'_n) é uma reordenação de (p_n) e (q'_n) é uma reordenação de (q_n). Pelo teorema precedente, segue que $\sum p'_n = p$ e $\sum q'_n = q$, isto é, $s' = \sum a'_n$ converge e vale $s' = p' - q' = p - q = s$. □

Teorema 0.3 (Riemann)**.** *Se* $\sum a_n$ *converge condicionalmente, então dado qualquer número real* $x \in \mathbb{R}$, *podemos reordenar os termos da série de modo a obter uma nova série que converge para* x.

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$ um número real qualquer. Como $s = \sum a_n$ converge condicionalmente, segue que $\sum p_n = +\infty$ e $\sum q_n = +\infty$. Com efeito, se fosse por exemplo $q = \sum q_n < +\infty$, então, como $p_n = a_n + q_n$, teríamos $\sum p_n \leq s + q$ pelo critério de comparação, donde $p = \sum p_n < +\infty$. Mas daí teríamos $\sum |a_n| < +\infty$, o que também segue do critério de comparação, pois $|a_n| = p_n + q_n$. Como isto contradiz a hipótese de convergência condicional, concluímos que $\sum p_n = +\infty$ e $\sum q_n = +\infty$.

Para obter a reordenação (a_n') de (a_n) tal que $x = \sum a_n'$, procedemos da seguinte forma. Começamos somando os termos positivos de (a_n) até que a soma ultrapasse x. Isso ocorrerá eventualmente, pois $\sum p_n = +\infty$. Em seguida, somamos os termos negativos de (a_n) até que a soma seja inferior a x. Isso ocorrerá eventualmente pois $\sum q_n = +\infty$. Em seguida, somamos os termos positivos até ultrapassar x e, então, os termos negativos até obter um resultado inferior a x. Prosseguimos assim infinitamente. Note que o resultado deve convergir para x, pois como $\sum a_n$ converge, temos $a_n \to 0$, donde os valores que ultrapassam x ou que são inferiores a x são cada vez mais próximos um do outro. Com efeito, se ouve troca de sinal da soma no termo a_k, a diferença entre a última soma parcial S' antes de somar a_k e a nova soma inicial S onde somamos a_k é $|S - S'| = |a_k|$. Ambas as somas estão em torno de x, logo, estas parciais estão convergindo para x, pois $|a_k| \xrightarrow{k \to \infty} 0$. □